Ecuaciones Diferenciales. Soluciones de equilibrio y estabilidad

Analía Bozzalla *

"Yo me alejo con espanto y horror de la triste maldad de las funciones que no tienen derivadas".

Charles Hermite, en una carta a Thomas Jan Stieltjes

Un poco de historia...

"La filosofía (naturaleza) está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos -el universo- pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello uno vaga sin esperanza en un oscuro laberinto". Galileo

Este pensamiento representa la creencia popular de la época de Galileo, centrada en la idea de que el conocimiento de la naturaleza podría reducirse a las matemáticas. Hacia fines del siglo diecinueve esta creencia se reforzó cuando Newton usó la ley de gravitación y el nuevo cálculo para deducir las tres leyes de Kepler. La huella de esta filosofía en las matemáticas fue muy fuerte, un gran número de matemáticos iniciaron su tarea de matematizar la naturaleza.

A partir de estos aportes buena parte de las leyes de la naturaleza fueron escritas en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales en derivadas parciales; las más famosas son la ecuación del calor, la ecuación potencial y la ecuación de onda.

La ecuación del calor. A principios del siglo diecinueve el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) inició el estudio del calor. El flujo de calor tenía muchas aplicaciones, tanto a problemas industriales como científicos: una mejor comprensión del fenómeno hacía posible que la fundición de metales fuera más eficiente permitiendo a los científicos determinar la temperatura de un cuerpo dada la temperatura en su frontera, y así, aproximar la temperatura en el interior de la tierra.

Denotemos T(x,y,z,t) la temperatura de un cuerpo homogéneo $\beta \subset \Re^3$ en un punto (x,y,z) en el tiempo t. Fourier probó, que T debe satisfacer la ecuación diferencial parcial llamada ecuación del calor

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

* Docente de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Palermo. El presente trabajo fue expuesto en las Jornadas de Ciencia y Tecnología 2002.

Donde k es una constante cuyo valor depende de la conductividad del material que compone el cuerpo.

Fourier usó esta ecuación para resolver problemas de conducción de calor. De hecho sus investigaciones de las soluciones de la ecuación lo condujeron al descubrimiento de un nuevo concepto matemático, llamado ahora series de Fourier.

La ecuación de potencial: Sea el potencial de gravitación V de una masa m en un punto (x;y;z) provocado por una masa puntual M colocada en el origen, dicho potencial está dado por $V=-GmM/r$ donde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. El potencial V satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de Laplace. Pierre Simon Laplace (1749-1827) realizó trabajos sobre atracción gravitacional de masas no puntuales, y fue el primero en relacionar la ecuación con la atracción gravitacional. Presentó argumentos, que luego se probó que eran incorrectos, que indicaban que la misma se cumplía para cualquier cuerpo y cualquier punto, ya sea fuera o dentro del cuerpo. Sin embargo no fue Laplace el primero en escribir la ecuación, ya que Euler en 1752 en su escrito *Pinciples of the Montions fluids* dedujo la ecuación de potencial relacionada con el movimiento de fluidos. Euler insistió en que no tenía idea de cómo resolver la ecuación. Posteriormente Poisson mostró que si (x;y;z) está dentro de un cuerpo atrayente, entonces V satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho$$

Donde ρ es la densidad del cuerpo atrayente, dicha ecuación actualmente es conocida como la ecuación de Poisson, este último fue el primero en señalar la importancia de esta ecuación para problemas relacionados con campos eléctricos.

Las ecuaciones de Laplace y Poisson son fundamentales en muchos campos: mecánica de fluidos, campos gravitacionales y campos electrostáticos.

La ecuación de onda: La misma tiene la siguiente forma en el espacio:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

La ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

La misma fue deducida en 1727 por John Bernoulli y varios años después por Jean Le Rond d' Alambert en el estudio para determinar el movimiento de una cuerda vibrante. Esta última ecuación se volvió muy útil para estudiar tanto cuerpos vibrantes como elasticidad.

Ecuaciones diferenciales
Soluciones de equilibrio y estabilidad

El lenguaje matemático es utilizado, en muchos casos, para describir y explicar las leyes del universo; los modelos matemáticos empleados permiten comprender los cambios que implican innumerables fenómenos físicos. Dichos cambios sólo pueden explicarse por medio de ecuaciones que relacionan cantidades que cambian, estas se denominan **ecuaciones diferenciales;** con lo cual: ¿qué es una ecuación diferencial? "Una ecuación que relaciona una función desconocida y una ó más de sus derivadas"[1], con esto decimos que una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la cual aparecen derivadas o diferenciales de una variable, que denominamos dependiente, la cual es función de otra única variable, llamada independiente. Con lo cual, encontrar la solución de una ecuación diferencial implica encontrar una función que reemplazada en la ecuación original, junto con sus derivadas permita llegar a una identidad.

Antes de avanzar en el tema veamos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales empleadas en la descripción de distintos fenómenos:

1- La Ley de enfriamiento de Newton establece que la tasa de cambio de la temperatura T(t) de un cuerpo respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia entre dicha temperatura T y la temperatura A del medio ambiente

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A) \qquad siendo \quad k < 0$$

Observemos que si T>A, entonces dT/dt <0, de modo que la temperatura es una función decreciente de t, con lo cual el cuerpo se está enfriando; si T<A, entonces dT/dt >0, es decir el cuerpo se está calentando.

Nota: Recordemos lo siguiente:

$$Sea \quad y = f(x), \quad la \quad \exp resión \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Indica la razón instantánea a la cual está cambiando la cantidad y=f(x) respecto a la variable independiente x

1. Edwards, Henry; Penney, David; *Ecuaciones diferenciales*; Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág. 1

2- La razón de decaimiento radiactivo es directamente proporcional a la cantidad de sustancia radiactiva presente.

$$\frac{dA}{dt} = -kA \quad con \quad k > 0$$

donde A es la cantidad desconocida de sustancia radioactiva presente en el instante t

3- "La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P(t) con tasas de natalidad y mortalidad constantes es, en muchos casos sencillos, proporcional al tamaño de la población" [2]. Esto es:

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{siendo k constante de proporcionalidad}$$

Si nos detenemos en este ejemplo vemos que cada función de la forma **P(t)=C e^{kt}** es una solución de la ecuación diferencial, ya que reemplazada en la ecuación original produce una identidad:

$$P'(t) = C\ ke^{kt} = k(C\ e^{kt}) = kP(t)$$

para todos los números reales t.

Aclaremos que, aún siendo conocido el valor de la constante k la ecuación diferencial seguirá teniendo un número infinito de soluciones de la forma especificada.

Después de haber desarrollado estos pequeños ejemplos vamos a poner en claro algunos conceptos directamente relacionados a la teoría de las ecuaciones diferenciales.

- Siempre que un modelo matemático implique la **razón de cambio instantánea** de una variable respecto a otra es probable que aparezca una ecuación diferencial.
- Las soluciones de una ecuación diferencial son funciones
- La solución no es única, ya que habrá tantas soluciones como constantes de integración; ahora bien, cómo obtener una única solución?: conociendo un punto perteneciente a la curva solución, esto se conoce con el nombre de **problemas con valores iniciales** (más adelante desarrollaremos con mayor precisión este concepto)

Para continuar con el estudio de la temática necesitamos cierta terminología común. Aclaramos en puntos anteriores que una ecuación diferencial que sólo implica derivadas ordinarias respecto de una sola variable independiente en una **ecuación diferencial ordinaria** (todos los ejemplos mencionados son de este tipo). Una ecuación diferencial

---

2. Edwards, Henry; Penney, David; *Ecuaciones diferenciales*; Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág.3

que implica derivadas parciales respecto de más de una variable independiente es una **ecuación diferencial en derivadas parciales,** por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$$

Donde las variables x e y son independientes y u variable dependiente.

Por otra parte, algunas ecuaciones diferenciales incluyen derivadas de orden superior, como por ejemplo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x^3$$

Con esto definimos **orden de una ecuación diferencial** como al mayor orden de integración o diferenciación que aparece en dicha ecuación.

En este artículo sólo haremos referencia a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer órden.

Soluciones de una ecuación diferencial

Ya hemos hablado sobre qué implica obtener la solución de una ecuación diferencial, ahora vamos a mencionar los distintos tipos de soluciones que pueden existir:

- **Solución general**, la misma se obtiene calculando una primitiva de dicha ecuación diferencial, **sin determinar el valor de la constante de integración,** veamos un ejemplo:

Sea la ecuación diferencial:

$y' = x + 1$ la solución general de la misma está dada por la siguiente familia de curvas integrales

$y = \frac{x^2}{2} + x + C$ con $C \in \Re$

Es decir que, geométricamente encontrar la solución general de una ecuación diferencial implica encontrar una familia de curvas integrales asociadas a la solución.

En el ejemplo empleado vemos que para los distintos valores de la constante C, obtendremos una familia de parábolas cuyo vértice se desplazará a lo largo de la recta vertical x=-1.

- Solución particular: Una solución particular de una ecuación diferencial es una solución en la que **no aparecen constantes a determinar**, la misma se obtiene **fijando condiciones iniciales** que permiten la sustitución de los parámetros por valores concretos. Geométricamente la misma se interpreta como **una curva determinada de la familia de curvas integrales**, obtenidas de la solución general.

Si volvemos al ejemplo anterior y fijamos como condición inicial y(-1)=1/2, estamos estableciendo una condición para seleccionar de la familia de curvas integrales aquella que pasa por el punto P=(-1; 1 /2); dicha condición está determinando el punto P del plano por el cual deberá pasar la única parábola de la familia que satisface la condición, de ahí obtenemos la solución particular

$$y = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

La gráfica de la función cuadrática anterior, obtenida como solución particular pasa por el punto P=(-1;1 /2).

Veamos un ejemplo en el cual el rigor teórico se pone de manifiesto.

Tomemos la ecuación diferencial:

$$y'x - y = 0$$

Al resolverla obtenemos como solución general y=Cx con C real. Si fijamos la **condición inicial y(0)=0** vemos que 0=0.C, con lo cual **cualquier valor de C satisface la condición inicial**.

Si ahora fijamos y(0)=2, obtenemos 2=C.0, con lo cual ningún valor de C satisface la condición.

A diferencia del ejemplo anterior no es posible encontrar una solución particular para cualquier (x,y) perteneciente al plano. Este hecho está relacionado con que la función derivada primera, obtenida de la ecuación diferencial original no está definida en x=0, veamos:

$$y'x - y = 0$$
$$y' = \frac{y}{x} \text{ no está definida en x = 0}$$

Con lo cual enunciaremos un teorema que especifica una condición suficiente para la existencia y unidad de la solución particular que cumple la condición inicial $y(x_0)=y_0$

Teorema de existencia y unicidad de la solución[3]

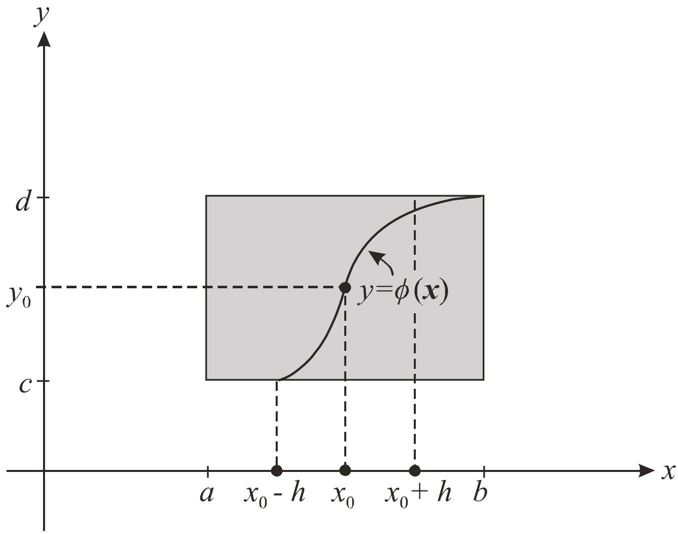
Dado el problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

supóngase que f y $\partial f / \partial y$ son funciones continuas en un rectángulo

$R = \{(x, y) / a < x < b \quad c < y < d\}$ que contiene al punto (x_0, y_0). Entonces el problema con valor inicial tiene una única solución $\phi(x)$ en algún intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$ donde $h > 0$

3. Nagle. Saff. Snider*; Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera;* Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág.13.



Este teorema nos está diciendo dos cosas:

a- Cuando una ecuación diferencial satisface las hipótesis del mismo, tenemos la seguridad de que el problema con valor inicial tiene solución

b- Cuando se satisfacen las hipótesis podemos asegurar que la solución es única

Gráficamente el teorema dice que existe una única curva solución por el punto (x_0,y_0). Para esta ecuación de primer orden no puede ocurrir que se crucen dos soluciones en algún punto del rectángulo.

Solución singular

La solución singular es aquella que no puede obtenerse a partir de la solución general por determinación de los parámetros; veamos un ejemplo:

Sea la ecuación diferencial:

$$y = xy' - (y')^2$$

que tiene como solución general $y = Cx - C^2$

Vemos entonces que la solución general está dada por una familia de rectas de pendiente C y ordenada al origen C^2. Ahora bien, ¿es posible generar todas las soluciones de la ecuación diferencial?, la respuesta es no ya que $y=1/4\ x^2$ también satisface la ecuación dada, con lo cual ésta última también es solución de la ecuación, en este caso decimos que **$y=1/4\ x^2$ es solución singular** de la ecuación diferencial.

Verificación:

$$y = \frac{1}{4}x^2; \quad y' = \frac{1}{2}x$$

$$xy' - (y')^2 = x.\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 = y$$

Hasta el momento hemos estudiado los diferentes tipos de soluciones de una ecuación diferencial, por otra parte, el teorema de existencia y unicidad estableció las condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución particular dada una condición inicial, sin embargo ninguna referencia hace respecto a *la naturaleza de las soluciones de una ecuación diferencial*. Es decir, nada nos dice sobre el valor de la solución en cierto punto, o los intervalos donde la solución es creciente, o los puntos donde la función alcanza un máximo ó mínimo. Para contar con esta información sería conveniente obtener una fórmula (representación explícita) para la solución de dicha ecuación[4], sin embargo en la mayoría de los casos las soluciones de ecuaciones diferenciales que describen fenómenos naturales son imposibles de conocer. En estos casos es posible realizar un estudio del comportamiento de dichas soluciones desconocidas desde dos enfoques:

1- **Enfoque cualitativo**, esto implicará construir el **campo de direcciones** de la ecuación diferencial.
2- **Enfoque cuantitativo,** esto implica desarrollar un procedimiento numérico destinado a construir aproximaciones a las soluciones de un problema con valor inicial (Método de Euler, Euler mejorado, Runge Kutta, Taylor)

Nos ocuparemos del estudio del primer enfoque.

Para poder bosquejar el campo de direcciones de una ecuación diferencial vamos a hacer algunas consideraciones generales:

Sea la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Donde la construcción del campo implicará pensar la ecuación desde su sentido geométrico: **el valor de f(x,y) determina la pendiente**

m= $y'(x)$= f(x,y) de la recta tangente a la gráfica de la curva solución en cada punto (x,y) del plano, es decir nos proporciona la dirección que debe tener una solución.

Desarrollemos un ejemplo para reforzar el concepto:

Sea la ecuación diferencial:

dy/dx= x+1

4. El lector podrá encontrar el desarrollo de todos los métodos de resolución de los distintos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden en cualquiera de los libros que figuran en la bibliografía de este artículo.

La primera pregunta sería ¿para qué puntos del plano (x,y) las gráficas de las curvas integrales tienen recta tangente con pendiente m=0?
dy/dx=0 entonces x+1=0, x=-1, esto implicará que en todos los puntos de la recta x=-1 se cumple que las pendientes de las rectas tangentes a la familia de curvas solución de la ecuación diferencial tienen pendiente m=0; diremos entonces que x=-1 es una isoclina correspondiente a m=0.

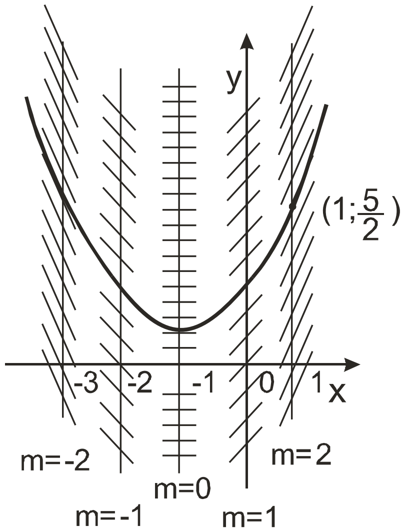
Entonces en x=-1 trazamos pequeños segmentos que constituirán las rectas tangentes a las gráficas de la curva integral.

Repetimos el procedimiento para:
m=1, con lo cual y'=1, entonces x=0 (isoclina para m=1)
m=-1 con lo cual y'=-1, entonces x=-2 (isoclina para m=-1)
m=2, con lo cual y'=-1, entonces x=1 (isoclina para m=2)

Si queremos una expresión generalizada de la isoclina tenemos:

$$y' = m_0 \Rightarrow x+1 = m_0 \Rightarrow x = m_0 - 1 \; isoclina \quad para \quad x = m_0 - 1$$

Obtenemos de esta forma el siguiente gráfico:



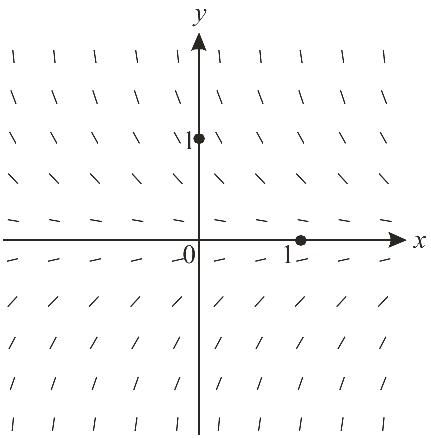
El gráfico obtenido es lo que llamamos **campo de direcciones,** es decir un bosquejo con pequeños segmentos de recta en puntos (x;y)que tienen como propósito mostrar la pendientes de la rectas tangentes a las gráficas de la curva solución en el punto correspondiente, se puede ver claramente que el campo indica el *flujo de soluciones*, facilitando el trazo de cualquier solución particular.

Entonces, ¿qué es una isoclina?, “una isoclina para una ecuación diferencial $y'=f(x,y)$ es un conjunto de puntos del plano xy donde todas las soluciones tienen la misma pendiente dy/dx; así es una curva de nivel para la función f(x,y)”[5]

Veamos otro ejemplo, con el propósito de estudiar el comportamiento de las soluciones a partir del campo de direcciones.

Sea la ecuación dy/dx = -2y

Empleando el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, llegamos al siguiente gráfico del campo de direcciones.



$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

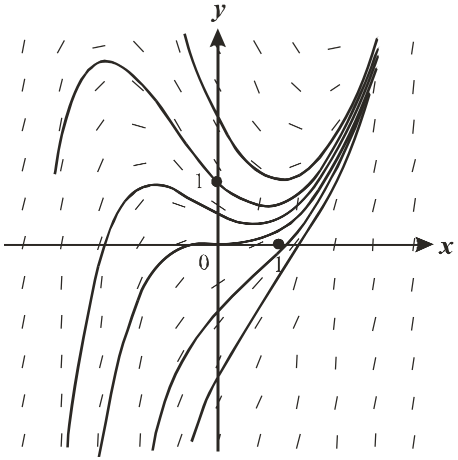
Si volvemos a los primeros ejemplos propuestos podremos observar que la ecuación anterior corresponde a la de decaimiento radiactivo donde y hace referencia a la cantidad desconocida de sustancia radiactiva, y x simboliza el tiempo; analizando el campo de direcciones podemos ver que el flujo de las soluciones indican que cuando x crece las curvas solución se acercan al semieje positivo de x, esto implica que a lo largo del tiempo el material radiactivo de la sustancia tiende a desaparecer.

Antes de ver una aplicación vamos a presentar algunos otros ejemplos de campos de direcciones.

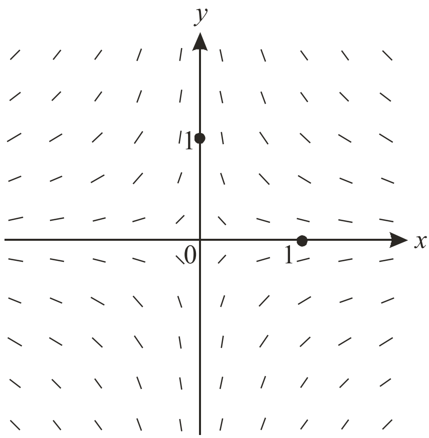
Sean las siguientes ecuaciones:

$dy/dx= x^2-y$

5. Nagle. Saff. Snider*; Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera;* Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág20

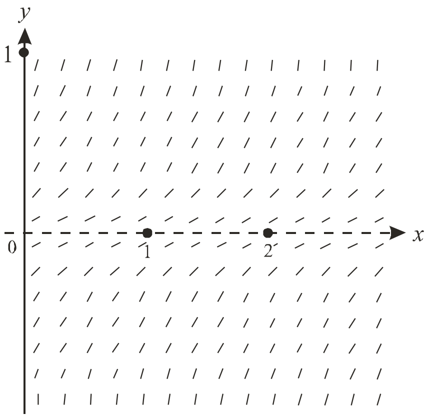


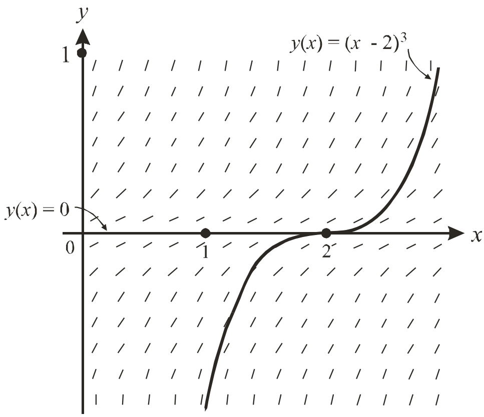
dy/dx= -y/x



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$dy/dx= 3y^{2/3}$



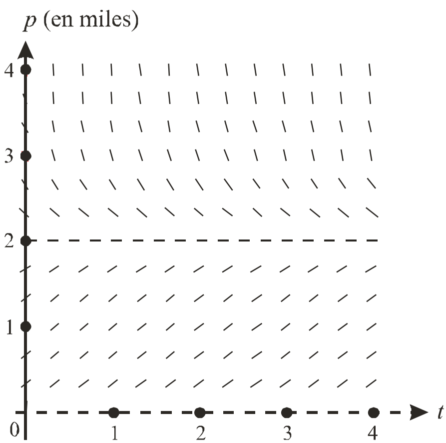


Veamos ahora un ejemplo que nos permitirá estudiar un tipo especial de ecuaciones diferenciales denominadas **autónomas**

La ecuación logística para la población p(en miles) de cierta especie en el instante t está dada por:

$dp/dt= p(p-2)$, siendo p un número positivo.

Si construimos su campo de direcciones obtenemos el siguiente gráfico:



Del campo de direcciones podremos obtener mucha información de esta población.

Vemos que todas las curvas solución (distintas de p(t)=0) tienden a la recta horizontal p=2 cuando $t\to+\infty$, es decir que reconocemos una asíntota horizontal en p=2 ya que $\lim_{x\to+\infty} p(t)=2$. Esto implica que todas las poblaciones mayores a 2000 decrecerán poco a poco, mientras que las inferiores a esta cantidad aumentarán. Ahora bien, el campo indica que las poblaciones inferiores a 2000 aumentarán, pero lo harán hasta dicha cantidad; y las superiores a 2000 decrecerán hasta dicha cantidad, con esto diremos que una población de 3000 habitantes nunca podrá decrecer hasta 500.

Con esto diremos que la solución p=2 es una **solución de equilibrio** ya que nos asegura que la población no se extinguirá pero tampoco generará crecimiento desmedido.

Si observamos la ecuación diferencial del problema presentado

dp/dt= p(p-2), vemos que la derivada de la función desconocida p=p(t) no depende de t, es decir "el patrón de pendientes es el mismo a lo largo de cada recta vertical"[6] , esta es la característica diferencial de las **ecuaciones diferenciales autónomas**, en ellas y' es sólo función de la variable dependiente; con lo cual si pensamos a t como el tiempo, podemos decir que las ecuaciones diferenciales autónomas se gobiernan a sí mismas, ya que la derivada y' está controlada por una función que está determinada únicamente por el estado actual y no por algún factor externo que dependa del tiempo.

La figura siguiente muestra la característica esencial de las ecuaciones diferenciales autónomas, sus soluciones pueden recorrerse con respecto al tiempo, ya que si y(t) resuelve la ecuación también lo hace $y(t-t_0)$.

Se puede observar también en el gráfico lo que denominamos en el punto anterior como **soluciones de equilibrio o puntos de equilibrio o estabilidad de la ecuación diferencial,** los mismos se identifican fácilmente, ya que son aquellos (x,y) para los cuales la pendiente f se anula, así observamos:

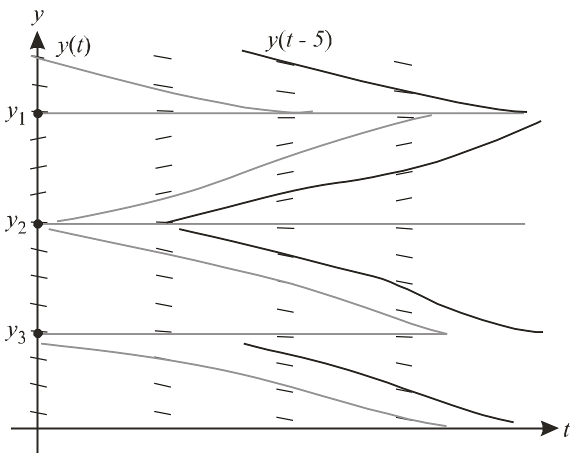
$f(y_1)=f(y_2)=f(y_3)=0$

Notemos además que los comportamientos de las soluciones de equilibrio no son todos iguales:

- Veamos que cuando $t\to+\infty$ las soluciones y(t) cercanas al punto de equilibrio $y_1(t)$ son obligadas a tender a y_1 cuando t crece.
- En lo que se refiere a y_2, vemos que cualquier perturbación aleja a la solución de y_2
- Con respecto a y_3 vemos que algunas soluciones son alejadas del punto de equilibrio, mientras que otras son atraídas hacia y_3.

De acuerdo a su comportamiento, los puntos de equilibrio se clasifican en estables e inestables, decimos entonces que y_1 es **estable** mientras que y_2, y_3 son **inestables;** por otra parte los puntos estables se conocen como **pozos o embudos**, mientras que los inestables que repelen a las soluciones se denominan **fuentes o expulsores** , aquellos que no son pozos ni fuentes se denominan **nodos.**

6. Nagle. Saff. Snider*; Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera;* Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág20



Vemos entonces que ahora tiene más sentido hablar de p(t)=2 como una solución estable para el problema planteado, ya que como aclaramos, la población de la especie estudiada nunca podrá llegar a alcanzar los 2000 habitantes o algún valor superior al mismo, con lo cual para esa cantidad de habitantes la población quedará en equilibrio con el medio ambiente.

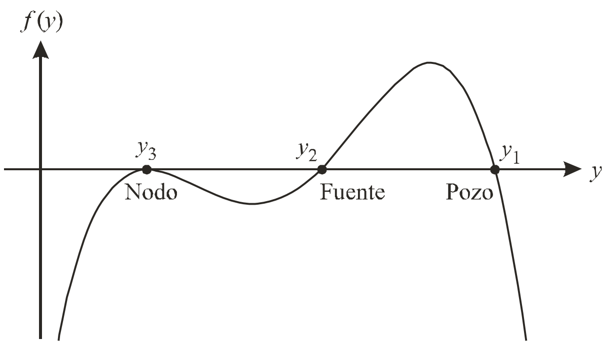
Ahora bien ¿de qué otra forma podremos hallar las soluciones de equilibrio para este tipo de ecuaciones diferenciales, sin necesidad de resolverlas?

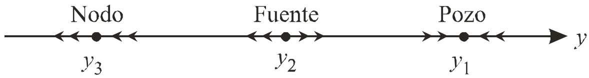
Dijimos que los puntos estables son aquellos para los cuales $y'=0$, con lo cual, para el problema anterior diremos:

$$p(p-2)=0$$

con lo cual $p=0 \vee p=2$

Una vez conseguidos, la clasificación de los mismos se limitará a estudiar el signo de la derivada y', esto se muestra en lo que llamamos **línea de fase para la ecuación diferencial.** Los puntos grandes indican las soluciones de equilibrio y las flechas entre ellos los signos de la derivada a ambos lados del punto estable, esto permite clasificarlos con mucha facilidad para luego realizar una descripción cualitativa de los mismos.





Antes de proponer los últimos ejemplos vamos a proponer las definiciones para cada uno de los puntos con los que hemos trabajado:

Sea la ecuación $dy/dt = f(y)$

"Un punto de equilibrio y^* es estable o un pozo si $f(y)>0$ para $y<y^*$ y $f(y)<0$ para $y>y^*$ (para toda y suficientemente cercana a y^*)"[7]

Para una fuente diremos en forma análoga
Un punto de equilibrio y^* es fuente si $f(y)<0$ para $y<y^*$ y $f(y)>0$ para $y>y^*$

Modelos matemáticos

Como dijimos en los comienzos de este artículo las ecuaciones diferenciales son excelentes herramientas matemáticas para describir fenómenos naturales, es aquí donde aparece el concepto de modelo matemático y lo definimos como una lista de variables que pretenden traducir una situación dada, junto con una o más ecuaciones que relacionan dichas variables que son conocidas o se suponen válidas. El análisis matemático consiste en la solución de dichas ecuaciones y en la aplicación de los resultados para interpretar el interrogante inicial; con lo cual el proceso del modelado implica:

1- Formular el problema en términos matemáticos
2- Analizar o bien, si es posible, resolver el problema matemático resultante
3- Interpretar el resultado en el contexto en el que fue planteado.

Vamos a enumerar algunos modelos conocidos y emplear el concepto de estabilidad para la descripción cualitativa de sus soluciones.

Modelos de población

Suponemos p(t): número de individuos de una población (humanos, insectos o bacterias). Vamos a suponer dos posibles modelos de población

a- Con tasas de natalidad y mortalidad constantes

Ecuación de crecimiento natural

Sea p(t) el número de individuos en una población con tasas de natalidad y mortalidad constantes β y δ (nacimientos ó muertes por individuo por unidad de tiempo). Con lo

7. Nagle. Saff. Snider; *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera;* Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág26

cual diremos que en un intervalo de tiempo muy corto Δt ocurren βp(t).Δt nacimientos y δp(t).Δt muertes, aproximadamente, de modo que:

$\Delta p \approx (b-d)p(t)\Delta t$

entonces

$$\frac{dp}{dt} = lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta p}{\Delta t} = kp$$
$$donde \quad k = \beta - \delta$$

b- Con tasas de natalidad y mortalidad no necesariamente constantes

Ecuación general de la población

Presentaremos aquí un modelo de población más general donde ambas tasas no son necesariamente constantes. Vamos a suponer que la población cambia sólo por la ocurrencia de nacimientos y muertes (no existen emigraciones ni inmigraciones), definimos entonces:
β(t): número de nacimientos por unidad de población por unidad de tiempo en el instante t
δ(t): número de muertes por unidad de población por unidad de tiempo en el instante t.

De ahí que el número de nacimientos y muertes que ocurren durante el intervalo de tiempo [t; t+Δt], está dado en forma aproximada por:

Nacimientos: β(t).p(t).Δt muertes: δ(t).p(t).Δt

Por lo tanto el cambio Δp en la población durante el intervalo citado está dado por:

Δp= nacimientos- muertes ≈ β(t).p(t).Δt - δ(t).p(t).Δt

de modo que:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)]p(t)$$

El error en esta aproximación deberá acercase a cero cuando $\Delta t \to 0$, entonces,

$$\frac{dp}{dt} = (\beta - \delta).P$$

Veamos un ejemplo referido a una población particular.

Supongamos una población de lagartos, que inicialmente tiene 100 lagartos y que su tasa de mortalidad es δ=0. Si la tasa de natalidad es β= 0.0005 y por tanto aumenta conforme lo hace la población, entonces la situación puede describirse por medio de esta ecuación diferencial con condición inicial[8]:

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}0005.p^2 \qquad p(0) = 100$$

8. Ejercicio seleccionado de Edwards, Henry; Penney, David; *Ecuaciones diferenciales*; Ed. Addison Wesley (tercera edición); México; 2001; pág 76

Con lo cual al separar variables obtenemos:

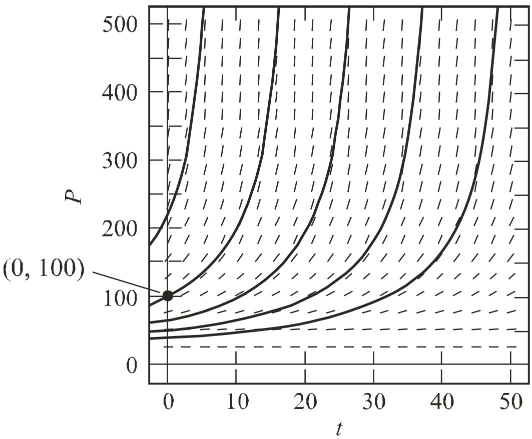
$$\int \frac{1}{p^2}\ dp = \int 0{,}0005\ dt$$

$$\frac{1}{p} = 0{,}0005t + C$$

usando la condición inicial $C = -1/100$

$$p(t) = \frac{2000}{20 - t}$$

Vemos entonces que $p \to +\infty$ cuando $t \to 20$, de modo que dentro de 20 años se producirá una explosión demográfica, este efecto se puede observar en la gráfica del campo de direcciones, donde se confirma que la población crece sin cota en un período finito.



c- Poblaciones limitadas y ecuación logística

En algunas poblaciones es posible observar que la tasa de natalidad disminuye conforme la población aumenta, las razones pueden ser diversas desde el incremento en el refinamiento científico ó cultural hasta la limitación en los recursos alimenticios.

Supongamos entonces que la tasa de natalidad β es una función lineal decreciente en función al tamaño de la población p, de modo que $\beta = \beta_0 - \beta_1 p$ donde los coeficientes son constantes positivas; si la tasa de mortalidad $\delta = \delta_0$ permanece constante, la ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{dp}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 p - \delta_0)p$$

$$donde \quad si \quad llamamos \quad a = \beta_0 - \delta_0 \quad b = \beta_1$$

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

Si los coeficientes a y b son positivos la ecuación anterior se llama **ecuación logística**[9] **.** Para simplificar la expresión anterior llamaremos:

k=b M=a/b

Con lo cual la ecuación logística queda escrita:

$$\frac{dp}{dt} = kp(M - p)$$

Si $0 < p < M$ la ecuación puede resolverse por variables separables donde resulta :

$$\frac{p}{M - p} = A.e^{kMt}$$

$$donde \quad A = e^C .Sustituimos \quad t = 0 \quad y \quad resulta \quad A = p_0 /(M - p_0)$$

$$con \quad lo \quad cual :$$

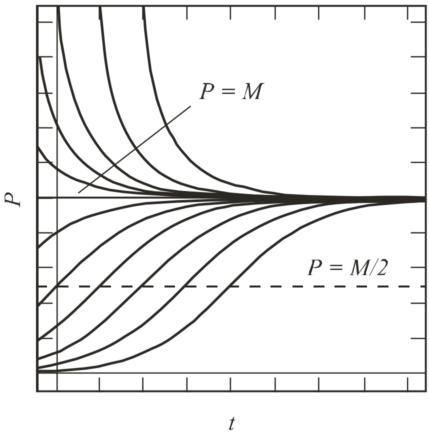
$$p(t) = \frac{Mp_0}{p + (M - p_0)e^{-kmt}}$$

Si la población inicial satisface $0<p_0<M$ entonces la ecuación anterior demuestra que $p(t)<M$ para todo $t \geq 0$ y también que:

$$lim_{t \to \infty} p(t) = M$$

Por lo tanto una ecuación que satisface la ecuación logística no tiene mucho que ver con la ecuación de crecimiento natural, donde recordemos la población crecía sin límite; en una función logística existe una población límite M cuando $t \to \infty$. En algunos casos a M se lo conoce como capacidad de mantenimiento del entorno ó ambiente, ya que está considerada como la población máxima que el entorno puede soportar a largo plazo; se puede observar dicho comportamiento en el gráfico

9. El modelos logístico para el crecimiento de poblaciones fue desarrollado por primera vez por P.F Verhulst cerca de 1840



Más aplicaciones de la ecuación logística

1- Situación de ambiente limitado: Algunos ambientes pueden sostener una población de no más de M individuos, con lo cual la tasa de crecimiento β–δ es proporcional a M-p (potencial de expansión), entonces β–δ=k(M-p)

$$\frac{dp}{dt} = (\beta - \delta)\, p = kp(M - p)$$

Un ejemplo de esta situación es la población de las moscas de fruta en un recipiente cerrado

2- Situación competitiva: Si la tasa de nacimiento β es constante, pero la de mortalidad δ es proporcional a p, de modo que δ=αp, entonces:

$$\frac{dp}{dt} = (\beta - \alpha p)\, p = kp(M - p)$$

Un ejemplo de esta situación podría ser una población caníbal donde las muertes resultan del encuentro fortuito entre individuos.

Estas constituyen algunas de las situaciones que ilustran la variedad de circunstancias en las que la ecuación logística es un modelo matemático satisfactorio.