La intuición y la matemática

Claudia López [*]

¿Qué es la intuición?

La intuición es un concepto controvertido en ciencia y filosofía. Es aceptada por algunos como fuente de conocimiento verdadero y rechazada por otros como potencialmente engañosa en toda búsqueda de la verdad. La intuición – como concepto y como método- revive discusiones filosóficas, en fundamentos teóricos de ciencia y matemáticas, en consideraciones místicas, en ética y estética, en pedagogía y aun en psicología.

El dominio de la intuición y de los diferentes y contradictorios significados a los que se refiere están relacionados con una gran variedad de investigaciones cognitivas: resolución de problemas (iluminación, heurística, esquemas anticipatorios, etc.), imágenes y modelos (representaciones intuitivas, modelos intuitivos, significados didácticos intuitivos, pensamiento en imágenes, etc.), creencias y niveles de confianza, estadios de desarrollo de la inteligencia .

Según Fischbein para cada uno de sus significados existen otros términos, más específicos, como sentido común, entendimiento, comprensión, creencia, conjetura, *insight*, pero en los libros de texto de psicología no se incluye la intuición entre los conceptos básicos que trata. A pesar de esto, el término intuición aparece frecuentemente, aún en descripciones psicológicas, pero sin conferirle un status formal o científico. La intuición se usa más como sentido común o como noción primitiva.

Para Fischbein la intuición no es la fuente primaria de conocimiento verdadero pero aparenta serlo porque ése es exactamente su rol: crear la apariencia de certeza, unir el atributo de certeza incuestionable, intrínseca a variadas interpretaciones o representaciones. Para Poincaré la intuición no puede darnos el rigor ni aún la certeza.

Es posible que el proceso de representación intuitiva produzca una representación distorsionada de la realidad original y que las predicciones puedan ser total o parcialmente incorrectas, por eso la intuición se considera como una fuente potencial de error.

Fischbein en su libro “Intuición en Ciencia y Matemática” expuso una teoría sobre la intuición donde analizó la importancia de las formas intuitivas del conocimiento en el razonamiento matemático y además estudió las consecuencias de esta idea en el ámbito de la educación matemática.

La intuición según Fischbein

Fischbein considera a la “intuición” como un equivalente del conocimiento intuitivo, no como fuente ni como método sino como un tipo de conocimiento.

---

* Docente de la Facultad de Ingeniería - UP.

Se admite intuitivamente que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta, que cada número tiene un sucesor, que el todo es mayor que la parte, que un cuerpo se cae si no está sostenido por algo, todas estas afirmaciones son aceptadas sin sentir la necesidad de una prueba formal o empírica. Se caracterizan por ser autoevidentes, en cambio la afirmación "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos", no se acepta intuitivamente porque no es evidente por sí misma.

Características generales del conocimiento intuitivo

Fischbein distingue distintas características del razonamiento intuitivo:

Autoevidente

Se considera la característica fundamental de las intuiciones. Al afirmar que el todo es mayor que la parte o que dos puntos determinan una línea recta, sentimos que esas afirmaciones son verdaderas por sí mismas sin la necesidad de una justificación

Antes de aceptarse la evidencia matemática de los números irracionales y del conjunto de los números reales, el concepto de número irracional apareció en contradicción con el concepto de número en sí mismo, que estaba representado por los números naturales.

Además dos items contradictorios de evidencia pueden coexistir y manifestarse alternativamente como tales. Al comparar el conjunto de los números naturales con el conjunto de los números pares, se siente por un lado que el conjunto de los números naturales tiene más elementos y por otra parte se sabe que los conjuntos son equivalentes (ambos son conjuntos infinitos).

La autoevidencia no implica sólo que el individuo sea capaz de justificar (lógicamente o empíricamente) la afirmación pertinente. Una afirmación aceptada intuitivamente no es siempre verdadera (o aparentemente verdadera) pero parece ser explicativa por sí misma. La expresión "Cada número tiene un sucesor" es intuitiva porque el concepto de número denota la idea de iteración ilimitada, la frase "El todo es mayor que la parte" también, porque el concepto de entero implica la idea de una suma de partes.

Certeza intrínseca

Otra característica fundamental del razonamiento intuitivo es el de ser aceptados como ciertos.

Lo evidente por sí mismo y la certeza están altamente correlacionadas pero no son reducibles una a la otra. Se debe estar totalmente convencido que una afirmación es verdad sin tener sentimiento alguno de que es autoevidente. Estamos convencidos que los teoremas matemáticos aprendidos en la escuela son verdad aunque muchos de ellos no sean evidentes por sí mismos. La certeza no implica la evidencia por sí misma y la evidencia por sí misma no denota certeza.

Cuando tratamos de identificar la presencia de un razonamiento intuitivo se tiene que determinar hasta dónde le parece al individuo que es una creencia intrínseca. Mucha de nuestra información: datos numéricos, nombres, fórmulas, teoremas, leyes científicas, son aceptados después de haberlos probado, o bien, aunque no se sientan como una creencia intrínseca y no sean conocimientos intuitivos, se aceptan porque están sostenidos por la autoridad de un libro o de un profesor.

Por el contrario, los axiomas de la geometría Euclideana, por ejemplo, son no sólo aceptados porque ellos son enseñados, sino también como autoevidentes acompañados por un sentimiento de certeza intrínseca.

El sentimiento de certeza no es un criterio absoluto de verdad objetiva. Sin embargo, permanece como un criterio para el conocimiento intuitivo.

Perseverancia

Las intuiciones, una vez establecidas, están arraigadas firmemente. La instrucción formal que provee al estudiante el conocimiento conceptual tiene muy poco impacto sobre el conocimiento intuitivo. Las intuiciones erróneas pueden convivir junto a las interpretaciones conceptuales correctas toda la vida.

La supervivencia de las contradicciones entre lo intuitivo, las representaciones y los conceptos científicamente adquiridos es una permanente fuente de dificultades para el profesor.

Carácter coercitivo

Las intuiciones ejercen un efecto coercitivo sobre las vías de razonamiento de los individuos. Se imponen subjetivamente sobre el individuo como absolutas y únicas representaciones o interpretaciones.

Aceptamos como evidente que por un punto no perteneciente a una recta pasa una y sólo una paralela a la misma, pero no podemos aceptar otras alternativas, por ejemplo que no pasa ninguna paralela o que pasan infinitas paralelas, como se afirma en las geometrías no euclideanas.

En la historia de la ciencia y la matemática la naturaleza de las intuiciones ha contribuido a perpetuar las interpretaciones incorrectas y a rechazar las correctas, aún después de que hayan sido probadas. La idea intuitiva de la tierra como el centro del universo impidió el desarrollo de la correcta concepción copernicana de la dinámica del sistema solar.

Hay que hacer una distinción entre el carácter coercitivo de un conocimiento intuitivo y la convicción inspirada por una prueba. No resulta difícil renunciar a una convicción si uno encuentra una prueba incorrecta, pero en cambio una convicción intuitiva, una interpretación intuitiva no puede ser erradicada fácilmente.

Estatus de teoría

Una intuición es una teoría o una mini teoría, nunca una habilidad o una mera percepción de un hecho dado.

Aceptando intuitivamente que “Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una perpendicular a la recta”, se acepta la necesidad y generalidad de esta afirmación. La afirmación “Dos rectas que se cortan determinan ángulos opuestos por el vértice iguales”, como ya se mencionó anteriormente, es autoevidente. En verdad, percibiendo la imagen se ve la igualdad de los ángulos, pero esto es una percepción no una intuición. Lo que nosotros intuimos es la universalidad de la propiedad.

En una intuición generalmente se comprende la universalidad de un principio, de una relación, de una ley – de un invariante- a través de la realidad particular. Una intuición, entonces, no es una pura teoría. Es una teoría expresada en una representación particular usando un modelo: un paradigma, una analogía, un diagrama o una construcción.

Carácter extrapolable

Una intuición excede la información disponible. Sin embargo, una conjetura obtenida por extrapolación no es suficiente para definir una intuición. La particular combinación del carácter incompleto de la información y de la certeza intrínseca caracterizan muy bien a una intuición.

El aspecto extrapolable de una intuición no siempre es evidente, porque la aparente obviedad de las intuiciones oculta el carácter incompleto de la información sobre la que está basada.

Una información intuitivamente evidente puede no requerir información adicional ni una prueba lógica porque la aparente obviedad de la información oculta la necesidad de una prueba adicional.

Poincaré ha enfatizado el salto intuitivo en el método recursivo de razonamiento. Si una afirmación es verdadera para el número 1 y se demuestra que es verdadera para n+1, siempre que lo sea para n, se concluye que la afirmación es verdadera para todo n.

El razonamiento procede a través de “una cascada de silogismos hipotéticos”. Si es verdadera para 1, entonces es también verdadera para 2; si es verdadera para 2 entonces es verdadera para 3, y así sucesivamente. Es suficiente para concluir con absoluta certeza que el teorema es verdadero para todo n.

El salto intuitivo en el razonamiento tiene que intervenir cuando tratamos con procesos infinitos o con conjuntos infinitos. La forma dinámica del infinito no presenta dificultad aparente. Pareciera que uno está naturalmente apto para concebir la indefinida continuación de un proceso. La noción de infinito dinámico expresa directamente, en la forma más pura, el carácter extrapolable de la intuición.

El rol fundamental del conocimiento intuitivo es el de conferir certeza a las ideas obtenidas después de haberlas extrapolado.

Globalidad

La intuición se describe también como un panorama global y sintético que se opone al pensamiento analítico que es de naturaleza discursiva.

El carácter global de la intuición recuerda al concepto de la Gestalt. La Teoría de la Gestalt promueve que "el todo es mucho más que la suma de las partes"; es el todo el que le da sentido a las partes.

La intuición es un conocimiento estructurado que ofrece una mirada global, unitaria o "insight" de una cierta situación. Se puede considerar que las leyes que gobiernan las intuiciones son similares a las leyes de la Teoría de la Gestalt.

Las intuiciones pueden ser más o menos estructuradas (internamente organizadas) y consecuentemente más o menos estables. Hay incipientes intuiciones inmaduras que pueden desvanecerse fácilmente bajo el impacto de algunos conflictos que se oponen al carácter evidente de las mismas. Hay, por otra parte, intuiciones fuertes y profundamente arraigadas en la experiencia de una persona, muy bien articuladas internamente y al mismo tiempo, muy bien articuladas con la estructura entera de las destrezas y esquemas mentales de la persona.

Carácter implícito

Para los individuos las intuiciones aparecen generalmente como conocimientos autoevidentes y autoconsistentes. Sin embargo, esto no excluye la suposición que las reacciones intuitivas son en realidad la estructura superficial que expresa lo tácito y subyacente de los mecanismos y procesos.

El carácter tácito de los procesos sobre los cuales una intuición está basada explica su aparente obviedad. Esto hace que el autocontrol sobre las intuiciones sea una tarea difícil.

La intuición no sólo oculta sus estrategias tácitas sino que se opone automáticamente a cualquier análisis porque podría destruir su certeza intrínseca, su carácter compacto, su robustez. Como resultado de tal análisis el individuo se confunde poniendo en peligro su actividad de razonamiento.

En ciertos ejemplos, evaluaciones intuitivas o interpretaciones usan deliberadamente significados intuitivos, principalmente modelos intuitivos y actividades prácticas. Por ejemplo, un diagrama de árbol es usado en problemas de combinatoria, segmentos de recta orientados son usados para representar magnitudes vectoriales. Pero en tales casos, también los procesos íntimos por los cuales la comprensión intuitiva surge son en su mayor parte desconocidos para el individuo.

La identificación del original con el modelo y viceversa, toma lugar sobre la base de ciertas reglas que el individuo no conoce.

La intuición y la experiencia

La experiencia constituye un factor fundamental en la formación de intuiciones y produce con el tiempo un sistema estable de representaciones que se traducen en programas estructurados de acción y de espera.

La fuente básica del conocimiento intuitivo es la experiencia acumulada por una persona en condiciones relativamente constantes" (Fischbein, 1987:85)

Se pueden distinguir tres aspectos principales: los elementos comunes a toda la experiencia humana, las experiencias que están vinculadas a la cultura y al ambiente geográfico en el cual cada persona vive (intuiciones básicas) y, finalmente, las experiencias particulares propias de la vida de cada individuo (intuiciones individuales).

Las intuiciones espaciales pertenecen al dominio de la experiencia humana, evolucionan con la edad y son producto de la práctica y de la maduración biológica.

Algunos factores innatos contribuyen a la organización de las representaciones espaciales pero la conducta y la experiencia juegan un papel fundamental. La representación intuitiva del espacio es una mezcla de propiedades euclideanas y newtonianas además de creencias primitivas que pertenecen esencialmente al dominio de la percepción.

Las representaciones espaciales primarias están formadas básicamente por nuestra vida en la tierra. No se puede imaginar el espacio infinito o absolutamente limitado. Ambas interpretaciones están totalmente fuera del alcance de nuestra experiencia humana.

La naturaleza limitada de la experiencia humana impone restricciones sobre el carácter seguro de las intuiciones y la calidad de práctica de las experiencias tiende a atribuir intuitivamente a nociones y operaciones mentales, propiedades que pertenecen puramente a lo concreto.

La intuición y las analogías

La intuición puede ser una guía invaluable para la construcción de un conocimiento. Sin embargo, en otras situaciones, puede obstaculizar no sólo la adquisición sino también la construcción de un nuevo conocimiento. En determinados casos la intuición conduce a la búsqueda de analogías. El estudiante o el científico, al encontrarse ante nuevos conceptos, trata de asociar y comparar el nuevo conocimiento con el ya existente dentro de su campo conceptual, e intenta aplicar al nuevo conocimiento nociones referidas al anterior. Establecer esas comparaciones es lo propio del descubrimiento y es el objeto de una forma de intuición de capital importancia, la intuición analógica.

La analogía implica una similitud de estructura que puede ser importante para la construcción de un modelo. El modelo produce un objeto mental, consistente internamente, relativamente familiar, estructurado y compacto, un componente viable de un activo proceso de razonamiento experimental.

La esencia del pensamiento analógico es la de transferir conocimiento de una situación a otra mediante un proceso de mapeo. Se establece un conjunto de correspondencias biunívocas, que son generalmente incompletas, entre aspectos de un conjunto de información y aspectos de otro.

Una analogía intuitiva ayuda a obtener una representación icónica unitaria con un significado concreto de comportamiento que posibilita una comprensión intuitiva, sin embargo, si la intuición analógica se siguiese sin ningún tipo de control en todas sus indicaciones podría conducir frecuentemente a conclusiones contrarias a la realidad.

La historia de las matemáticas ha registrado los esfuerzos vanos, inspirados por la intuición analógica a los algebristas del siglo XVIII y a Lagrange, tendientes a resolver las ecuaciones enteras de cualquier grado por medio de fórmulas que generalizasen las utilizadas para las ecuaciones de segundo y tercer grado. Cuando el matemático extrapola por analogía, se expone a ser desmentido por los hechos; pero ese riesgo no debe impedirle esta forma de exploración mientras la lógica siga teniendo sus derechos. La exploración analógica conduce, en algunos dominios, a perspectivas de conjunto cuya armonía constituye un elemento esencial de la belleza de las matemáticas.

Polya, citado por Fischbein, ha escrito sobre las grandes analogías en la matemática y menciona la existencia de una analogía fundamental entre el dominio de los números y el de las figuras y entre los números finitos e infinitos.

Polya distingue diferentes tipos de analogías que pueden intervenir en el pensamiento matemático.

En primer lugar distingue dos grandes categorías de analogías intra-matemáticas:

a) En la primera categoría tanto el modelo como el original no utilizan medios intuitivos explícitos sino un simbolismo numérico-algebraico. Ej: el caso de las operaciones con números imaginarios, definidas por analogía con los números reales.
b) En esta categoría están los términos que son intuitivos, como puede ser una representación geométrica, y el otro término es un expresión simbólica. Ej: representación geométrica de funciones basadas en el isomorfismo fundamental existente entre números y figuras.
c) En esta tercer categoría de analogías extra-matemáticas, interviene el razonamiento matemático usando un modelo que puede ser una representación material de los conceptos matemáticos. Ej: materiales estructurados, representaciones pictóricas de números o conceptos geométricos.

En un proceso de razonamiento real, estos modelos pueden presentarse combinados, y por lo tanto, pueden dar lugar a equívocos y soluciones incorrectas.

Las analogías en la matemática pueden ser beneficiosas si después de ser aceptadas intuitivamente pueden ser justificadas lógicamente. También pueden ser fuente de concepciones erróneas cuando se asumen correspondencias que no son parte del mapeo estructural de los dos sistemas. Generalmente, esos errores se generan por la incompatibilidad entre una propiedad formal del sistema que está siendo modelizado y una propiedad intuitiva del modelo de representación que, consciente o tácitamente, guía los procesos cognitivos.

Bibliografía

CHILD, DENNIS. (1975). Psicología para los docentes. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

FISCHBEIN, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordretcht, The Netherlands: Reidel.

LE LIONNAIS, F. (1962). Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Eudeba.

PIAGET, JEAN. (1973). Psicología de la Inteligencia. Buenos Aires: Editorial Psique.

POINCARE, HENRI. (1946). El valor de la Ciencia. Buenos Aires: Espasa-Calpe.