Cardinalidad

Marcela Wilder *

Todos estaríamos de acuerdo en decir que los conjuntos {a; b; c} y {◆ ; ■ ; ●} tienen la misma cantidad de elementos.

Es fácil ver que cuando dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos existe, por lo menos una forma de asociar cada elemento del primer conjunto con un solo elemento del segundo. En nuestro ejemplo, podríamos asociar la a con ◆ ; la b con ■ y la c con ●.

De esta manera, no nos sobran elementos en ninguno de los dos conjuntos.

Esta asociación que podemos hacer entre conjuntos con la misma cantidad de elementos, es decir, con el mismo cardinal, se llama función biyectiva. Sin entrar en demasiados detalles matemáticos, aclararemos que una asociación es una función biyectiva cuando a cada elemento del primer conjunto le corresponde exactamente un elemento del segundo conjunto sin que sobren elementos en ninguno de los dos conjuntos.

A partir de este concepto tan sencillo, podríamos decir sin sorprendernos demasiado que dos conjuntos tienen el mismo cardinal si se puede establecer al menos una función biyectiva entre ellos.

Ahora, ¿qué ocurre cuando pensamos en conjuntos infinitos?

Veamos un poco el conjunto de números naturales. Recordemos que estos son: 1; 2; 3; ... y el conjunto de números naturales pares que son: 2; 4; 6; 8; 10; 12; ...

Sin duda, estaríamos todos de acuerdo si afirmáramos que el conjunto de números pares está incluido en el conjunto de números naturales. Intuitivamente podríamos creer que la cantidad de números pares es menor a la cantidad de números naturales, es mas, alguien podría afirmar que son exactamente la mitad ya que faltan los impares. Sin embargo, si asociáramos cada número natural con el doble de ese número, tendríamos una función biyectiva entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares.

Detengámonos un minuto a pensar los detalles.

Todo número natural puede multiplicarse por 2, y el resultado de dicha multiplicación es un número par. A su vez, todo número par es el doble de algún número natural. Por lo tanto esta asociación relaciona cada elemento del primer conjunto con uno solo del segundo conjunto sin que sobren elementos en ninguno de los dos.

Por el concepto visto anteriormente, podríamos decir que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos aunque intuitivamente hayamos creído que no.

---

* Docente de la Facultad de Ingeniería - UP.

Esta teoría tan "insólita" fue desarrollada por el gran matemático Georg Cantor (1845- 1918), creador junto a Dedekind de la teoría de conjuntos y de esta que hoy espiamos que fue llamada la teoría de los números transfinitos.

Cantor llamó aleph cero, simbólicamente $\aleph_0$ al cardinal de los números naturales.

A esta altura de los acontecimientos, ustedes pensarán que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos, simplemente por ser infinitos. Lamento informarles que no es tan sencillo.

Se pueden encontrar funciones biyectivas entre el conjunto de números naturales y el de enteros y hasta se puede entre el conjunto de números naturales y el de números racionales.

Pero, está demostrado que no existe ninguna función biyectiva entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales. Es decir, que a pesar que tanto los números naturales como los reales son infinitos, hay más números reales que naturales (lo que nos permite afirmar que hay muchos más números irracionales que racionales).

El cardinal de los números reales se nota con la letra C.

Entonces podemos afirmar que $\aleph_0 < C$.

También está demostrado que el conjunto formado por todos los subconjuntos de los números reales tiene un cardinal mayor a C.

Por lo tanto, el conjunto de los números reales no tiene el cardinal más grande. De hecho, no existe el cardinal más grande. Dado cualquier cardinal, siempre existe uno mayor.

Algo que se preguntó Cantor y que aún no tiene respuesta es saber si entre $\aleph_0$ y C existe algún otro cardinal. Esta es la llamada hipótesis del continuo.

Aunque las demostraciones de los teoremas referidos son claras y bastante sencillas, lo que nos llevó a escribir sobre esta teoría es la pregunta a la que nos lleva:

¿Debemos creer en nuestra intuición o en lo que demuestran los teoremas?

La respuesta no se la daremos, está en ustedes.