ISSN 0328-5715
ISSN 2524-955X

La volatilidad, su cálculo y su incidencia en los precios de los derivados

Ricardo A. Tagliafichi [1]

RESUMEN

Si por definición llamamos derivados a las operaciones cuyo precio o prima deriva del precio del bien subyacente, entonces la volatilidad del mismo debe tener alguna relación con la determinación del precio de los contratos de futuro o derivados. Este trabajo intenta encontrar alguna relación entre las volatilidades, las volatilidades implícitas, las volatilidades estimadas y como se pueden ajustar los precios teóricos de los contratos de futuro con variaciones a la formula clásica de Black and Scholes. Utilizando como caso de estudio la acción de Tenaris, los resultados muestran que las primas calculadas con modelos no lineales permiten establecer precios máximos que podría cobrar el mercado por dichas primas en casos de euforia en los precios del bien subyacente. Por otra parte el mercado no convalida rápidamente grandes subas de los precios del bien subyacente fijando volatilidades implícitas nulas en estos casos.

ABSTRACT

If we define, in business finance, derivatives as a transactions where the prime or options prices derives from the underlying asset, then the asset volatility must have some relationship with the options prices. This work tries to find some relationship between volatilities, implied volatilities and forecasted volatilities. Moreover, we examine how can adjust the theoretical prices introducing changes in the classic Black and Scholes formula. The prices series of Tenaris are used for this analysis, and the results shows that the prime estimated with non linear models determines the maximum price that the market will establish in moments of market euphoria for the prices of the underlying asset. On the other hand, the options market does not accept immediately great positive changes in the underlying asset prices, fixing in these moments null implied volatilities.

JEL CLASSIFICATION: G12

Keywords: Options, volatility, implied volatility, conditioned volatility, Garch models.

1. Actuario de la Universidad Nacional de Buenos Aires. Profesor de Valuación de Activos Financieros de la Escuela de Negocios de la Universidad de Palermo. E-mail: rtagliafichi@itcom.com.ar

I. Introducción

Recordando a un periodista radial que decía “los mercados nacen en la desconfianza, crecen en el escepticismo, maduran en la sostenimiento y mueren en la euforia” fue que me puse a analizar el comportamiento de cierto mercado de opciones, cuyo bien subyacente tiene gran peso en el mercado de valores de la Bolsa de Comercio de Buenos Aires: la acción de Tenaris.

Una de las herramientas que se utilizan para analizar el comportamiento del mercado es el cálculo de la volatilidad y la volatilidad implícita en el precio de mercado de las opciones de compra. Muchos sostienen que el mercado de derivados, en nuestro caso las opciones de compra, marcan la tendencia de los precios del bien subyacente para un horizonte muy cercano, por no decir para el día siguiente. Se ha escuchado que algunos operadores prestan mucha atención al cierre de los precios de las primas de las opciones porque ello les indica como abrirá el mercado al día siguiente.

Dentro de los análisis que se hacen sobre la relación entre el precio de los contratos y el precio del bien subyacente esta el cálculo de la volatilidad implícita. Comenzaremos por definir como se usa la volatilidad y que es esta volatilidad implícita.

II. La fórmula de Black and Scholes

Una de la maneras de calcular un precio justo a pagar por una opción de compra, es usando la conocida formula de Black and Scholes, de cuya deducción se han escrito muchos artículos y libros que refiero en la bibliografía utilizada.

Esta fórmula define que el precio de la prima de la opción de compra esta dado por:

$$C = f\,(E,So,i,t,s) \qquad (1)$$

Donde: ***C*** es el precio o prima a cobrar por el lanzador de la opción, ***E*** simboliza al precio de ejercicio de la opción, ***So*** es el precio del bien subyacente en un momento dado, ***i*** es la tasa de interés anual aplicada, ***t*** representa la cantidad de días que faltan hasta el vencimiento y ***s*** es la volatilidad anualizada.

Aplicando la función descripta en (1), la fórmula para calcular el precio de la prima de una opción de compra es la siguiente:

$$C = SoN(d1) - \frac{E}{e^{i\frac{t}{n}}} N(d2) \qquad (2)$$

Siendo N la función de distribución normal para el cálculo de la probabilidad acumulada al valor de abcisa de *d1* y *d2,* siendo

$$d1 = \frac{\ln(S0/E) + (i + s^2/2)\dfrac{t}{n}}{s\sqrt{\dfrac{t}{n}}} \qquad (3)$$

$$d2 = d1 - s\sqrt{\frac{t}{n}} \qquad (4)$$

Del análisis de las fórmula del cálculo del precio de la prima y aplicando a la misma el cálculo de los componentes expresados en (2) y (3) surge esta apreciación: El precio de ejercicio (***E***), el precio del bien subyacente (***So***) y la cantidad de días que faltan hasta el vencimiento (***t***) son valores que surgen del contrato y de las cotizaciones de pizarra de manera indubitable en el momento de hacer el cálculo de costo por precio de de la prima (***C***). El problema se presenta con la tasa de interés (***i***) y la volatilidad (***s***).

La tasa de interés, dado el plazo de vigencia de los contratos a analizar, puede ser la tasa Badlar publicada por el BCRA para operaciones de bancos privados, como una buena referencia para determinar el valor de (i) a ingresar en la formula

El otro problema es el cálculo de la volatilidad (***s***). Respecto a esta variable hay cientos de artículos y libros que describen, o tratan de describir el comportamiento de la volatilidad.

Para resumir el problema tomemos como referencia el comportamiento del mercado al cierre del día 31 de marzo de 2008.

Volatilidad anualizada de Tenaris tomando distintos periodos recientes			
30 días	**20 días**	**10 días**	**5 días**
58.97	67.79	70.69	48.72

¿Entonces cual es la volatilidad que se debe tomar? Entiendo que vale la pena determinar las causas que provocan este ramillete de valores para aplicar a la variable ***s***.

III. La volatilidad - Su comportamiento y predicción

Antes de describir el tratamiento de la volatilidad y su comportamiento, describiré como anualizar la volatilidad el mercado y sus operadores. Siguiendo la hipótesis clásicas del comportamiento de los retornos de los activos, donde se sostiene que los activos siguen un camino al azar, en consecuencia no hay ninguna relación entre los retornos de un día con los retornos de días anteriores, se puede anualizar la volatilidad aplicando la regla de $t^{½}$ siguiendo un proceso browniano[2] de la siguiente manera[3]

$$s = s_1\ 365^{½} \qquad (5)$$

2. El movimiento browniano que se quiere aplicar nace de las observaciones realizadas por el físico Robert Brown que sostiene que el tiempo que tarda una partícula en llegar de un lugar a otro es igual a la raíz cuadrada de la distancia. Aplicado al mercado de capitales resulta la ecuación (5)

3. Ver Ricardo Tagliafichi Métodos y Modelos para el calculo de VaR y Administración de Portafolios, Ediciones Cooperativas paginas 105 - 106

Donde ***s*** es la volatilidad anualizada y s_1 es la volatilidad diaria

Esta forma de calcular la volatilidad que usa el mercado ha sido ampliamente demostrada[4] que no refleja el comportamiento de los retornos[5] y además que la volatilidad sigue un proceso de volatilidad condicionada por la presencia de heterocedasticidad en la serie de retornos.

Si la ecuación (5) cumpliese con el comportamiento de las hipótesis clásicas, entonces los resultados de las observaciones de la tabla con volatilidades tomando distintos periodos darían resultados iguales o parecidos, pero en realidad los resultados difieren. Entonces la pregunta es: ¿Cuál de todas las volatilidades anuales se debe tomar para calcular el precio teórico de la prima de una opción de compra?

Si analizamos la incidencia de la volatilidad en la fórmula de Black and Scholes, vemos que la volatilidad anualizada se reduce al periodo de vencimiento de la opción o sea se recalcula la volatilidad para el periodo ***t*** según las formulas (3) y (4). Las alternativas que se presentan en estos casos es el uso de modelos de cálculo de volatilidades dependientes como son los procesos no lineales, tales como la aplicación de los modelos Garch.

Un modelo no lineal Garch (1,1) es el siguiente:

$$s_d = \sqrt{\varpi + \alpha\, \varepsilon^2_{d-1} + \beta\, s^2_{d-1}} \qquad (6)$$

Donde: s_d = volatilidad calculada pata el día d; ω, α, *y* β son los coeficientes del modelo; ε^2_{d-1} el error al cuadrado resultante de la diferencia entre el retorno esperado y el retorno real del día d-1 y s^2_{d-1} es el cuadrado de la volatilidad estimada con este modelo para el día d-1.

Este modelo, ampliamente discutido en la bibliografía, tiene las siguientes ventajas:

1) Calcula la volatilidad para los periodos futuros en base al pasado reciente. Si lo pensamos en función de un inversor, poco le importa que paso hace un año o dos, solo le interesa la última performance del activo en cuestión.
2) Si la suma de los coeficientes $(\alpha + \beta) < 1$ entonces el modelo no es explosivo y permitirá calcular la volatilidad para periodos mas largos que ***d+1***, como ser el periodo que se necesita para calcular la volatilidad de una opción *t*. usando la siguiente formula:

$$\sigma^2_{d,t} = \frac{\varpi}{1-(\alpha+\beta)}\left[(t-1) - (\alpha+\beta)\frac{1-(\alpha+\beta)^{t-1}}{1-(\alpha+\beta)}\right] + \frac{1-(\alpha+\beta)^t}{1-(\alpha+\beta)}\sigma^2_d \qquad \mathbf{(7)}$$

3) Dado que α y β son las raíces de la ecuación y si se cumple la condición 2) el modelo es estacionario en las varianzas, da manera tal que al garantizar que no es

4. Solicito las disculpas del lector por mi falsa modestia, pero en el libro que hago referencia he resumido todas las corrientes clásicas y modernas sobre el tema.

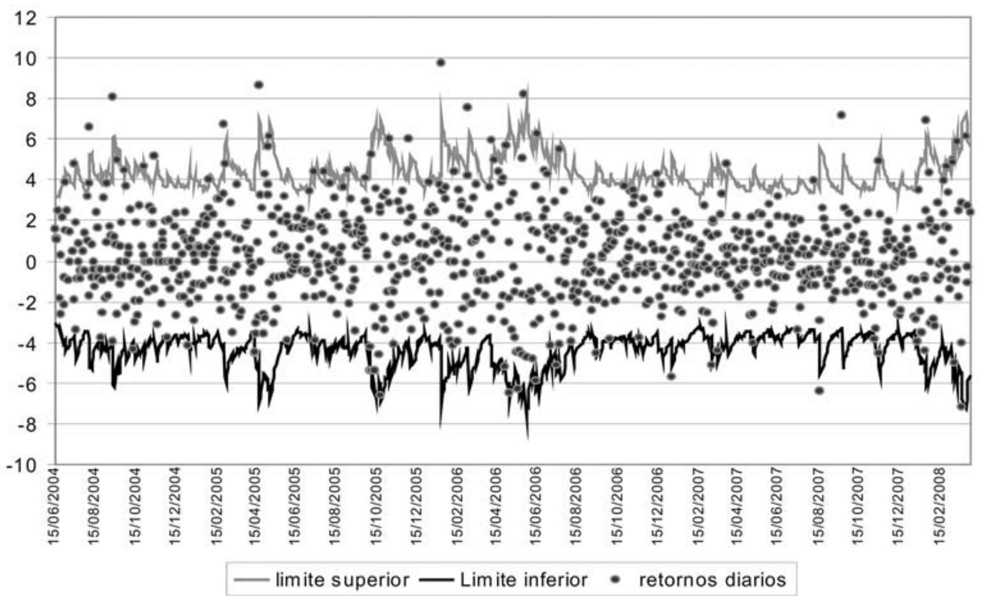
5. Ver Ricardo Tagliafichi Métodos y Modelos para el cálculo de VaR y Administración de Portafolios, Ediciones Cooperativas páginas 129 - 138.

explosivo, la suma de $(\alpha + \beta)$ se la llama persistencia del modelo y permite calcular en cuanto tiempo se diluye un fuerte impacto en los retornos (valor alto en ε_{d-1})

El mayor problema se presenta cuando la persistencia es mayor que 1. Allí las soluciones pasan por modelos mas sofisticados como lo son los modelos asimétricos[6] . El otro problema es que el modelo no sabe interpretar si el mercado está en alza, $\varepsilon_{d-1} > 0$, o está en baja, $\varepsilon_{d-1} < 0$, dado que este coeficiente es elevado al cuadrado y por esta razón este modelo Garch (1,1) es un modelo simétrico.

Para demostrar las bondades del modelo, basta con analizar su comportamiento, aplicando a la misma especie analizada un back testing como el que sigue:

Gráfico 1: Retornos diarios e Intervalo de confianza utilizando modelo Garch (1,1)



Es simple observar que en el Intervalo de confianza practicado con un 95% de seguridad este modelo deja afuera de los límites superior e inferior a 19 observaciones que sobre 947 observaciones representan un 2%, muy inferior al 5% que seria el valor aceptable dado el tipo de construcción.

6. Ver Ricardo Tagliafichi Métodos y Modelos para el calculo de VaR y Administración de Portafolios, Ediciones Cooperativas páginas 129 - 138

IV. La formula de Black and Scholes modificada

Una solución al problema de la selección de que volatilidad incluir en la formula de Black and Scholes sería aplicar la volatilidad calculada por un modelo Garch (1.1) para el periodo de vida que le resta al contrato de la siguiente forma:

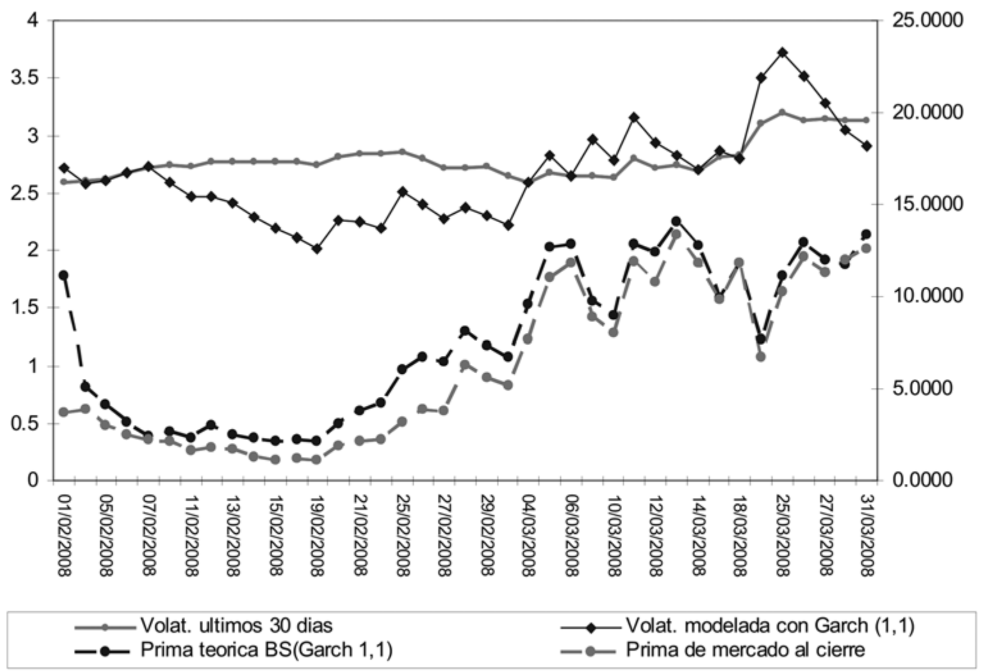
$$d1 = \frac{\ln(S0/E) + (i\frac{t}{n})\text{`} + \frac{s_{1.t}^{2garch}}{2}}{s_{1.t}^{garch}} \tag{8}$$

$$d2 = d1 - s_{1.t}^{garch} \tag{9}$$

De esta manera la volatilidad así calculada debería generar un precio mas razonable dado que el modelo elegido calcula la volatilidad condicionada a un pasado reciente.

Para aportar mayor claridad a las ventajas de usar un modelo no lineal, se muestra en el gráfico siguiente las diferencias en el cálculo de volatilidades diarias usando el método tradicional, seleccionando en forma arbitraria 30 días de muestra, y el modelo propuesto no lineal, durante el periodo de análisis de la evolución del precio de los contratos de opciones de Tenaris.

Gráfico 2: Diferencias entre la volatilidad tradicional y el modelo Garch (1,1) y diferencias entre las primas teórica y reales



Si aplicamos el uso de las formulas modificadas en (8) y (9) al cálculo de las primas teóricas según se puede observar en el grafico anterior se pueden sacar las siguientes conclusiones:

a) Cuando la volatilidad calculada con modelos no lineales se acerca a la volatilidad tradicional, los precios teóricos están por encima de las primas que cobra el mercado, y
b) Cuando la volatilidad calculada con modelos Garch (1,1) está por encima de la volatilidad tradicional, las primas calculada en estos casos tienden a los valores que cobra el mercado
c) Las primas calculadas con los modelos no lineales están marcando un máximo de lo que podría cobrar el mercado.

Esta aseveración se comprueba aplicando el test r_s de Spearman que analiza el orden de rangos de dos series. En este caso analizamos una serie definida como:

1) la diferencia entre el precio teórico de la prima propuesto por el modelo Garch (1,1) y el precio de mercado de la prima para el mismo contrato y
2) la diferencia entre la volatilidad tradicional y la volatilidad estimada con modelos Garch (1,1)

Ordenadas las series por el valor de las mismas se aplica el test cuyo estadístico es el siguiente:

$$r_s = \frac{6\sum_{i=}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} \rightarrow N\left(0, \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \qquad (10)$$

Donde n es la cantidad de observaciones y d_i^2 es la diferencia en el orden de las series elevado al cuadrado.

Aplicado este test a los precios[7] de los contratos analizados se acepta que existe relación entre las mismas y que se cumplen las conclusiones expuestas como a) y b) resultantes del gráfico 2.

V. La volatilidad implícita

Al menos estamos comprobando un comportamiento de la volatilidad dependiente y su relación con los precios de las primas que cobra el mercado. Otro de los temas que abordaremos es el caso de la volatilidad que cobra el mercado en el caso de las opciones de compra. El concepto de volatilidad implícita nace de despejar la volatilidad de la formula presentada en (1), dado que los demás valores son conocidos o, como el caso de la tasa de interés, relativamente conocido. Este cálculo no es fácil hacerlo en forma explicita, dado que hay que llegar por algún método numérico a la solución o bien aplicar el sistema de iteraciones sucesivas.

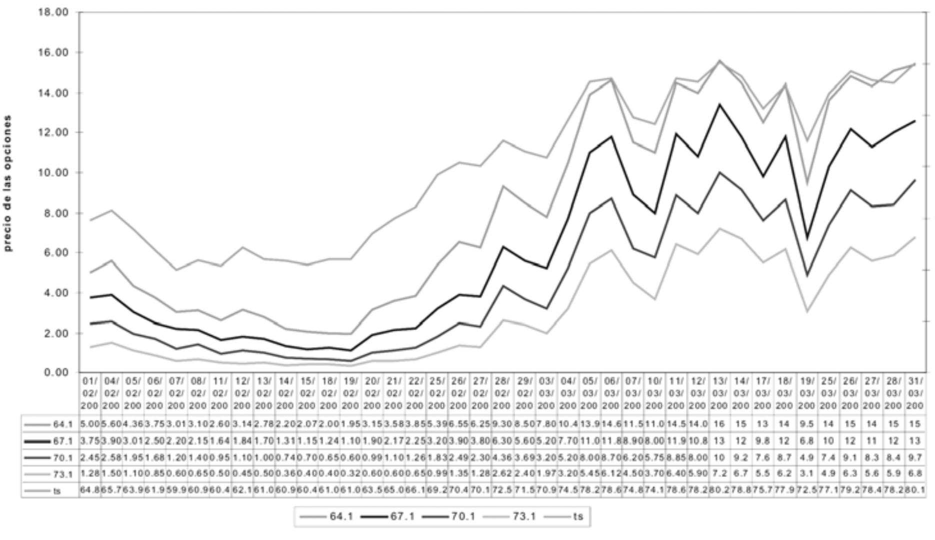
7. Ricardo A. Tagliafichi. The implied volatility announces the behavior of the market risk. International Congress of Actuaries. Paris 2006.

Analicemos el comportamiento del precio del bien subyacente y los valores del mercado de las primas de los contratos de opciones de compra para ciertos precios de ejercicio. Como se puede apreciar, sin mucho detalle técnico, las subas y las bajas de los precios al cierre de los distintos contratos siguen la evolución del precio del bien subyacente. Pero el problema se presenta en las variaciones del precio de los contratos.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de los retornos de los mismos de manera estática, o sea independiente de la fecha de ocurrencia del suceso.

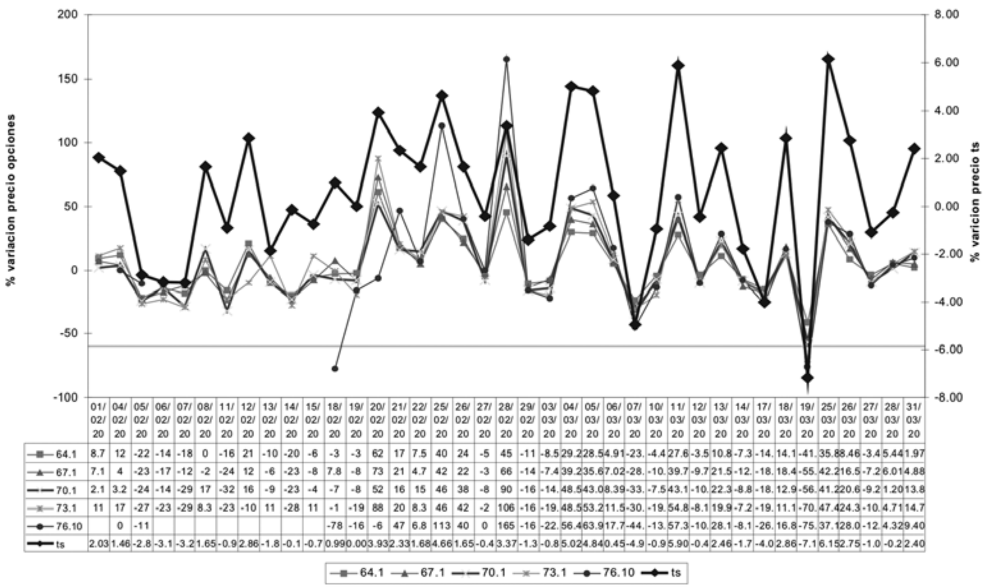
Retornos diarios en %	**E = 64.10**	**E = 67.10**	**E = 70.10**	**E = 73.10**	**E = 76.10**	**Tenaris**
Máximo	61.54	72.57	89.57	106.30	165.00	6.15
Mínimo	-41.59	-55.69	-56.83	-70.13	-77.65	-7.18

Gráfico 3: Precio de Tenaris y de los contratos de opciones al cierre



Veamos este mismo análisis en forma dinámica, o sea analizándolo día por día, según el siguiente grafico:

Gráfico 4: Retornos diarios de Tenaris y de los contratos de opciones al cierre



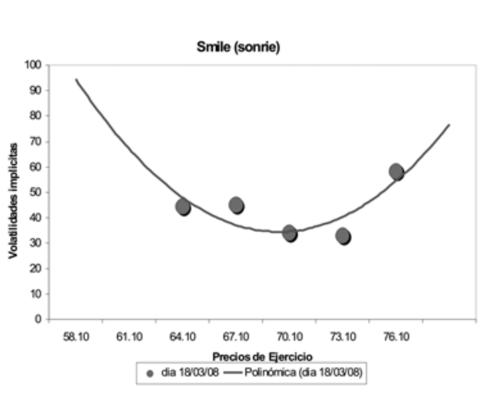
	01/02/20	04/02/20	05/02/20	06/02/20	07/02/20	08/02/20	11/02/20	12/02/20	13/02/20	14/02/20	15/02/20	18/02/20	19/02/20	20/02/20	21/02/20	22/02/20	25/02/20	26/02/20	27/02/20
64.1	8.7	12	-22	-14	-18	0	-16	21	-10	-20	-6	-3	-3	62	17	7.5	40	24	-5
67.1	7.1	4	-23	-17	-12	-2	-24	12	-6	-23	-8	7.8	-8	73	21	4.7	42	22	-3
70.1	2.1	3.2	-24	-14	-29	17	-32	16	-9	-23	-4	-7	-8	52	16	15	46	38	-8
73.1	11	17	-27	-23	-29	8.3	-23	-10	11	-28	11	-1	-19	88	20	8.3	46	42	-2
76.10		0	-11									-78	-16	-6	47	6.8	113	40	0
ts	2.03	1.46	-2.8	-3.1	-3.2	1.65	-0.9	2.86	-1.8	-0.1	-0.7	0.99	0.00	3.93	2.33	1.68	4.66	1.65	-0.4

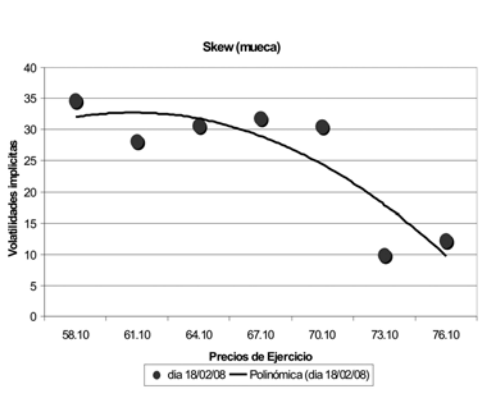
	28/02/20	29/02/20	03/03/20	04/03/20	05/03/20	06/03/20	07/03/20	10/03/20	11/03/20	12/03/20	13/03/20	14/03/20	17/03/20	18/03/20	19/03/20	25/03/20	26/03/20	27/03/20	28/03/20	31/03/20
64.1	45	-11	-8.5	29.2	28.5	4.91	-23.	-4.4	27.6	-3.5	10.8	-7.3	-14.	14.1	-41.	35.8	8.46	-3.4	5.44	1.97
67.1	66	-14	-7.4	39.2	35.6	7.02	-28.	-10.	39.7	-9.7	21.5	-12.	-18.	18.4	-55.	42.2	16.5	-7.2	6.01	4.88
70.1	90	-16	-14.	48.5	43.0	8.39	-33.	-7.5	43.1	-10.	22.3	-8.8	-18.	12.9	-56.	41.2	20.6	-9.2	1.20	13.8
73.1	106	-16	-19.	48.5	53.2	11.5	-30.	-19.	54.8	-8.1	19.9	-7.2	-19.	11.1	-70.	47.4	24.3	-10.	4.71	14.7
76.10	165	-16	-22.	56.4	63.9	17.7	-44.	-13.	57.3	-10.	28.1	-8.1	-26.	16.8	-75.	37.1	28.0	-12.	4.32	9.40
ts	3.37	-1.3	-0.8	5.02	4.84	0.45	-4.9	-0.9	5.90	-0.4	2.46	-1.7	-4.0	2.86	-7.1	6.15	2.75	-1.0	-0.2	2.40

En este caso hay algunas relaciones que nos inducen a comportamientos alternativos como encontrar días que hay retornos negativos en los precios del bien subyacente y que alguno de los retornos de los contratos de opciones tomen valores positivos.

Dentro de este marco de variaciones podremos encontrar las famosas muecas y sonrisas a partir de las volatilidades implícitas graficadas. En el grafico No. 5 he analizado dos días de cotizaciones que muestran una sonrisa de satisfacción y una mueca asimétrica.

Gráfico 5: Volatilidades implícitas de varios contratos a cierta fecha





El día 18/02/08 se presenta como un día donde el mercado viene registrando retornos negativos durante la última semana en los precios del bien subyacente, razón por la cual hay una mueca de escepticismo en la curva de la tendencia de estas volatilidades implícitas.

Por el contrario, del día 19/03/08 los precios del bien subyacente muestran valores positivos y entonces las volatilidades implícitas muestran una sonrisa de satisfacción. Esto significa que el mercado esta eufórico o confiado en el crecimiento.

Por otra parte nos encontramos con ciertos días en que el mercado se desconcierta y en función de los valores de cierre se determinan ciertas primas que no permiten calcular volatilidad implícita alguna.

Para ello veamos algunos ejemplos:

El día 31 de marzo de 2008 TS (72 horas) marca un precio de cierre de $ 80.10. Si se toma el contrato con precio de ejercicio de $ 73.10, el mismo tendría un precio teórico de $ 7.00 (compro a 73.10 y vendo a 80.10) como mínimo, siendo el precio de cierre $ 6.80 Evidentemente en este caso, como en muchos otros, no hay volatilidad que se pueda aplicar para obtener el precio de mercado.

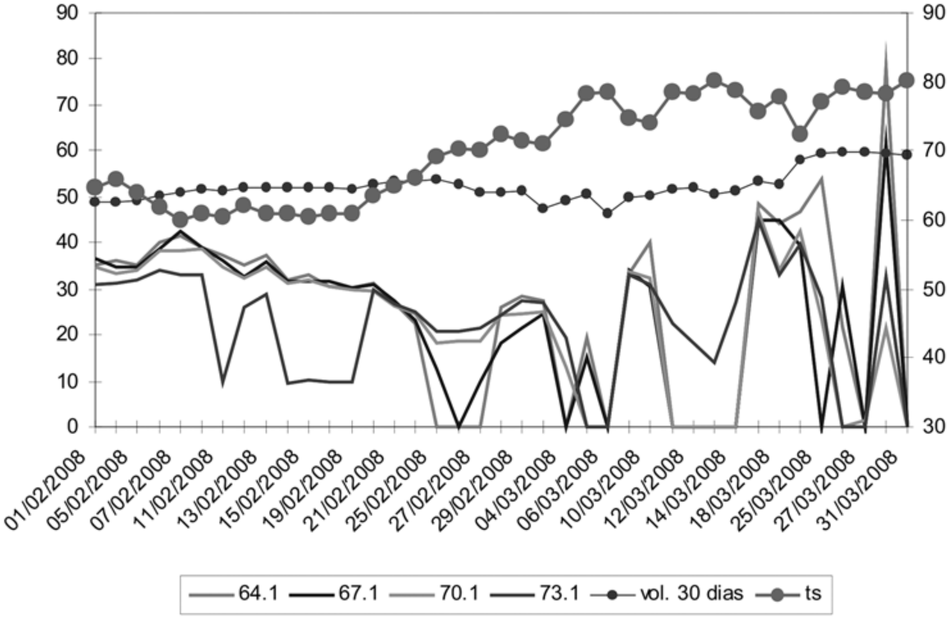
Analizando que eventos se producen cuando aparecen estos resultados, éstos siempre se producen cuando en el mercado el precio del bien subyacente presenta altas variaciones positivas, significado de desconfianza o escepticismo en el sostenimiento de los precios. La reacción es más rápida cuando hay bajas en el precio del bien subyacente.

Hay un hecho significativo en el periodo analizado y que se puede comparar en la tabla de rendimientos del activo y de los precios de las primas de los distintos contratos. El retorno más bajo en los precios de las primas coincide en el retorno más bajo en el precio del bien subyacente, pero no ocurre lo mismo en el caso contrario.

VI. Conclusiones

Como resultado de estas apreciaciones, podemos concluir que el mercado es reticente a convalidar los precios de suba del bien subyacente a través de la fijación de un precio para la prima del derivado. Lo que si rápidamente convalida es la caída del precio del bien subyacente, reduciendo el precio de la opción, fijando una volatilidad implícita por debajo de la volatilidad en momentos de euforia.

El gráfico que sigue es demostrativo de lo que estamos diciendo, Cuando el precio comenzó a crecer los precios de las primas no convalidaron rápidamente las subas según se puede apreciar fijando por varios días precios de primas con volatilidades implícitas en cero.



Por otra parte si se modela la volatilidad a través de un modelo no lineal, esta volatilidad dependiente marca un valor máximo que podría llegar a tomar el precio de las primas de mercado, dado que el mercado esta desconfiando de los precios que está tomado el bien subyacente.

Cuando las primas de mercado se igualan con las primas calculadas con volatilidades no lineales, es el momento que se está convalidando los precios del mercado del bien subyacente. Si queremos operar en el mercado de opciones, muy a nuestro pesar, modelar la volatilidad con Garch (1,1) y vigilar el comportamiento de la volatilidad implícita, nos ayudará a tomar decisiones mas seguras.

Referencias

Bollerslev T., 1986, Generalized autoregressive conditional heterocedasticiy, *Journal of Econometrics* 31, 307-327

Basel Committee on Banking Supervision, 2001, The New Basel Capital Accord, *Bank for International Settlement*

Cruz Marcelo G., 2002, Modeling measuring and hedging operational risk, *John Wiley and Sons*

Duffie Darrell, Jun Pan, 1997, An Overview of Value at Risk, *The Journal of Derivatives,* Spring 1997

Embretchs Paul, Kluppelberg Claudia, Mikosch Thomas, 1997 Modeling Extremely Events for insurance and finance, *Springer*

Engle, Robert F., 1982 Autoregressive conditional heterocedasticiy with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometric* 50, 987-1007

Engle, R., y T. Bollerslev, 1986, modeling persistence of conditional variances, *Econometric Review* 5, 1-50

Engle, R., y Victor K. Ng, , 1993, Measuring and testing the impact of News an Volatility, *The Journal of Finance* Vol. XLVIII, Nro. 5

Glosten, Lawrence, Ravi Jaganathan, and David Runkle, 1993, On the relationship between then expected value of the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance* Vol. XLVIII, Nro. 5

Greene, William H., 1997, Econometric Analysis, *Prentice Hall*, New Jersey

Duan Jin-Chuan, 1995, The Garch option pricing model, *Mathematical Finance* Vol. V Nro.1

Mc. Neil, Frey, Embretchs, 2004, Quantitative Risk Management, PRICETON University Press

Nelson, D., 1990, Conditional heterocedasticiy in asset returns: A new approach, *Econometrica* 59, 347-370

Reiss R. D., Thomas M. 2001, Statistical Analysis of Extreme Values, *Birkhauser Verlag*

Tagliafichi Ricardo A., 2001, The Garch model and their application to the VaR, *XXXI International Astin Colloquium*, Washington 2001

Tagliafichi Ricardo A. 2002, Betas calculated with Garch models provides new parameters for a Portfolio selection with Efficient Frontier, *ICA Cancun 2002*

Tagliafichi Ricardo A. 2003, The estimation of Market VaR using Garch models and a heavy tail distributions, *Astin Berlin 2003*

Tagliafichi Ricardo A. 2006, The implied volatility announces the behavior of the market risk, *ICA Paris 2006*

Tsay Ruey S. 2002, Analysis of Financial Time Series, *John Wiley and Sons*

Wiggins, J.B., 1987, Option Values under stochastic volatility: Theory and empirical tests. *Journal of Financial Economics* 19, 351-372

Zakoian Jean-Michel, 1992, Threshold Heterocedasticiy models, *Journal of Economic Dynamics and Control* Nro 18