La función Z de Riemann

Prof. Marcela Wilder*

Los siete problemas del milenio han sido elegidos por una institución privada de Cambridge, Massachutsets, el instituto Clay de matemática, para premiar con un millón de dólares a quien demuestre alguna de estas conjeturas.

Uno de los problemas del milenio, elegido para este trabajo es el de los ceros de la función zeta de Riemann.

La conjetura de Riemann, consiste en creer que los ceros de la función zeta son números complejos cuya parte real es 1/2, es decir, están alineados.

La importancia de su resolución radica en gran medida en su relación con los números primos, tema fundamentalmente relacionado con la seguridad informática por ser utilizado en criptografía.

De hecho, bajo la hipótesis de Riemann, fue como Jacques Hadamard y Charles de la valle Poussin pudieron probar en 1896 y de forma independiente, el enunciado desde entonces conocido como el "teorema de los números primos", según el cual, el total, $\pi(x)$, de números primos menores que un entero dado, x, verifica muy aproximadamente la siguiente relación:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x) - 1{,}08}$$

Conceptos previos:

Análisis en variable compleja:

Funciones de una variable compleja:

Sea $S \subseteq C$, $f : S \to C$; $f(z) = w$.

Supongamos que $z = x + i.y \wedge w = u + i.v$ con $x; y; u; v \in R$; entonces $u = u(x; y) \wedge v = v(x; y)$; es decir, podríamos considerar a u; v: $R \to R$.

Por ejemplo si $f(z) = z^2 \Rightarrow f(x+i.y) = (x + i.y)^2 = x^2 - y^2 + 2xy.i$, por lo que $u(x; y) = x^2 - y^2 \wedge v(x; y) = 2xy$.

Límites:

Sea $f(z) = u(x; y) + i.v(x; y)$; $z_0 = x_0 + i.y_0$; $w_0 = u_0 + i.v_0$; $\Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} u(x;y) = u_0 \quad \wedge \quad \lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} v(x;y) = v_0 .$$

---

* Docente de la Facultad de Ingeniería. Universidad de Palermo.

Derivadas:

Sea f una función cuyo dominio de definición contenga un entorno de un punto z_0. La derivada de f en z_0, $f´(z_0)$, se define como: $f´(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, suponiendo que el límite exista.

Ejemplo: Sea $f(z) = |z|^2$; entonces; $\frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z).\overline{(z + \Delta z)} - z.\overline{z}}{\Delta z} =$

$$\frac{(z + \Delta z).(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z.\overline{z}}{\Delta z} = \frac{z.\overline{z} + z.\overline{\Delta z} + \Delta z.\overline{z} + \Delta z.\overline{\Delta z} - z.\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z} + \overline{\Delta z} + z. \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

Cuando z = 0, esto se reduce a $\overline{\Delta z}$, por lo tanto la derivada es cero en el origen.

Si el límite existe para $z \neq 0$, se puede hallar ese límite haciendo tender la variable $\Delta z = \Delta x + i.\Delta y$ a cero de manera arbitraria. En particular, si $\Delta y = 0$; podemos escribir $\overline{\Delta z} = \Delta z$; por lo que, si el límite existe, su valor ha de ser $z + \overline{z}$. Sin embargo, si $\Delta x = 0$, es decir, $\Delta z = 0 + i.\Delta y$, de modo que $\overline{\Delta z} = -\Delta z$, entonces, el límite resulta ser $z - \overline{z}$. Como el límite es único, $z + \overline{z} = z - \overline{z}$, luego, z = 0.

Por lo tanto el límite existe sólo en el origen.

Este ejemplo muestra que una función puede ser derivable en un cierto punto, pero no derivable en ningún otro de cualquier entorno de dicho punto.

Dado que las partes real e imaginaria de $f(z) = |z|^2$ son $u(x;y) = x^2 + y^2 \wedge v(x;y) = 0$

Respectivamente, vemos que las componentes real e imaginaria de una función de variable compleja pueden tener derivadas parciales continuas de todos los ordenes en un punto y, sin embargo, la función no ser derivable, ni siquiera en ese punto.

La función $f(z) = |z|^2$ es continua en cada punto del plano por serlo sus componentes.

La continuidad de una función en un punto no supone la existencia de la derivada en ese punto, aunque si vale la recíproca.

Teorema de Cauchy- Riemann:

Supongamos que f(z)= u(x;y)+ i.v(x;y) y que $f´(z_0)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + i.y_0$

Entonces, las derivadas parciales de primer orden de u y v respecto a x e y existen en $(x_0; y_0)$ y cumplen $u_x(x_0; y_0) = v_y(x_0; y_0) \wedge u_y(x_0; y_0) = -v_x(x_0; y_0)$

Y además $f´(z_0) = u_x(x_0;y_0) + i.v_x(x_0;y_0) = v_y(x_0;y_0) - i.u_y(x_0;y_0)$

El hecho que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy- Riemann en un punto $z_{0\,=}(x_0;y_0)$ no basta para asegurar la existencia de la derivada de una función f(z) en ese punto pero tenemos el siguiente útil teorema:

Supóngase que la función f(z) = u(x; y) + i.v(x; y) esta definida en un entorno de radio e de un punto $z_0 = x_0 + i.y_0$.

Supóngase también que existen las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v respecto a x e y en todos los puntos del entorno y que son continuas en $(x_0; y_0)$, entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy- Riemann, $u_x(x_0; y_0) = v_y(x_0; y_0) \wedge u_y(x_0; y_0) = - v_x(x_0; y_0)$, entonces existe $f'(z_0)$ en $(x_0; y_0)$.

Ejemplos:

1) Sea $f(z) = z = x^2 – y^2 + i.2xy$.
   Entonces, $u(x; y) = x^2 – y^2 \wedge v(x; y) = 2xy$
   $u_x (x, y) = 2x \wedge v_x (x; y) = 2y$
   $u_y(x; y) = -2y \wedge v_y (x; y) = 2x$
   Por verificarse las ecuaciones de Cauchy-Riemann, existe $f'(z_0)$ y además: $f'(z_0) = 2x + i.2y = 2.(x + i.y) = 2z$, luego, $(z^2)' = 2z$.

2) $f(z) = |z|^2$; $u(x; y) = x^2 + y^2 \wedge v(x; y) = 0$
   Entonces $u_x(x; y) = 2x \wedge\ v_x (x; y) = 0$
   $u_y (x; y) = 2y \wedge\ v_y (x; y) = 0$
   Como no se cumplen las ecuaciones de Cauchy- Riemann salvo si x = y = 0, la derivada $f'(z)$ no existe si $z \neq 0$ como ya habíamos visto anteriormente.

Funciones analíticas:

Una función f de la variable compleja z es analítica u holomorfa en un punto z_0, si su derivada existe, no sólo en z_0, sino también en cada punto z de un entorno de z_0. Nótese que si una función f es analítica en z_0, es también analítica en cada punto en un entorno de z_0.

Si una función deja de ser analítica en un punto z_0, pero lo es en todo entorno de z_0, z_0 se llama un punto singular de f.

Consideremos, por ejemplo, la función $f(z) = 1/z$ $(z\neq 0)$ cuya derivada es $f'(z) = -1/z^2$. Tal función es analítica en todos los puntos, salvo en z = 0, donde ni siquiera esta definida. El punto z = 0 es entonces un punto singular de z.

Una condición necesaria, pero no suficiente para que una función z sea analítica en un dominio D es la continuidad de f en todo D. El que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario pero no suficiente.

Si dos funciones son analíticas en un dominio D, su suma y su producto son ambos analíticos en D, de forma análoga, su cociente es analítico en D, supuesto que la función del denominador no se anule en ningún punto de D. La composición de dos funciones analíticas es también una función analítica.

Funciones armónicas:

Sea $D \subseteq C$ abierto y $u: D \to R$ de clase C^2, u se dice armónica si y sólo si $u_{xx} + u_{yy} \equiv 0$.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ se llama Laplaciano, es decir, u es armónica si y sólo si $\Delta(u) \equiv 0$.

Proposición: Sea $f: D \subseteq C \to C$ holomorfa; $f \equiv u + i.v$, con $u; v : D \to R$ (D abierto y simplemente conexo); entonces u y v son armónicas.

Demostración:

$u_{xx} + u_{yy} \equiv (u_x)_x + (u_y)_y$ (por Cauchy- Riemann) $\equiv (v_y)_x + (-v_x)_y \equiv v_{yx} - v_{xy} \equiv 0$.

Análogamente

$v_{xx} + v_{yy} \equiv (v_x)_x + (v_y)_y$ (por Cauchy- Riemann) º $(-u_y)_x + (u_x)_y \equiv -u_{yx} + u_{xy} \equiv 0$.

Definición: Sea $D \subseteq C$ abierto conexo y u armónica en D. Si v es C^2 en D y u; v verifican las condiciones de Cauchy- Riemann, se dice que v es una conjugada armónica de u. Notar que esto ocurre si y sólo si $f \equiv u + i.v$ es holomorfa.

Proposición: Sea $D \subseteq C$ abierto conexo y sean u, v: $D \rightarrow R$ funciones de clase C^2 entonces:

(i) v es conjugada armónica de u $\Leftrightarrow$ -u es conjugada armónica de v.

(ii) Si u y v son mutuamente conjugadas armónicas $\Rightarrow$ u y v son constantes.

Ejemplo: Hay varias maneras de calcular conjugadas armónicas, lo usual, es hacerlo a mano integrando.

Sea u: $C \rightarrow R$ definida por $u(x+i.y) = y^3 - 3x^2y$ (u es armónica). Para calcular una conjugada armónica de u, por Cauchy- Riemann, si v es conjugada armónica de u, $u_x = v_y \wedge u_y = -v_x$, entonces $u_x = -6xy = v_y$, entonces, integrando, $v_y = -3xy^2 + \phi(x)$ (1)

Por otro lado, $-u_y = -3y^2 + 3x^2 = v_x$ (2)

De (1) y (2) $-u_y = -3y^2 + \phi'(x)$; por lo que $\phi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \phi(x) = x^3$.

Luego, $v(x; y) = -3xy^2 + x^3$ es un candidato. Basta verificar que

$f(x+i.y) = (y^3 - 3x^2y) + i.(-3xy^2 + x^3)$ es holomorfa.

Integrales:

Definiremos en primer lugar la integral definida de una función compleja de una variable real t sobre un intervalo dado $a \leq t \leq b$.

Sea $w(t) = u(t) + i.v(t)$ con u y v funciones reales de t, continuas a trozos en el intervalo cerrado [a; b]. Es decir, cada una de las funciones es real y continua en todo el intervalo, salvo posiblemente en un número finito de puntos donde la función, aunque discontinua, tiene límites finitos por la derecha y por la izquierda. Por supuesto, en a sólo se requiere el límite por la derecha, y en b sólo por la izquierda. Decimos entonces que w es continua a trozos en [a; b] y definimos la integral como

$$\int_a^b w(t).dt = \int_a^b u(t).dt + i.\int_a^b v(t).dt$$

Propiedades:

(i) $$\mathrm{Re}(\int_a^b F(t).dt = \int_a^b \mathrm{Re}(F(t))dt \wedge \mathrm{Im}(\int_a^b F(t).dt) = \int_a^b \mathrm{Im}(F(t))dt$$

(ii) $$\alpha.\left(\int_a^b F(t).dt\right) = \int_a^b \alpha.F(t).dt$$

(iii) Si G:[a,b]→C es también continua, $\int_a^b (F+G)(t).dt = \int_a^b F(t).dt + \int_a^b G(t).dt$

(iv) $\left|\int_a^b F(t).dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\, dt$

Las integrales de las funciones de una variable compleja se definen sobre curvas en el plano complejo, en vez de los intervalos sobre la recta real. Introduciremos los tipos de curvas que resultan apropiadas para tales integrales:

Un arco C del plano complejo es un conjunto de puntos z = (x; y) tal que x = x(t); y = y(t) con a ≤ t ≤ b. Donde x(t) e y(t) son funciones continuas del parámetro real t. Esta expresión establece una aplicación continua del intervalo a; b en el plano z; los puntos imagen están ordenados de acuerdo con los valores crecientes de t. Los puntos de C se describen mediante la ecuación z = z(t), donde z(t) = x(t) + i. y(t)

El arco C es un arco simple o arco de Jordan si no se corta a sí mismo; esto es, C es simple si z(t1) ≠ z(t2) cuando t1 ≠ t2. Cuando el arco C es simple salvo por ser z(b) = z(a), diremos que C es una curva simple cerrada o curva de Jordan.

Integrales curvilíneas:

La integral de una función compleja de la variable compleja z esta definida en términos de los valores f(z) sobre un contorno dado C que se extiende desde un punto z(a) = z_1 hasta un punto z(b) = z_2 en el plano complejo. Es, por lo tanto una integral curvilínea, dependiendo su valor, en general, del contorno C así como de la función f.

$$\int_c f(z).dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z).dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t).dt$$

Teorema de Cauchy- Gousat:

Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces, $\int_c f(z).dz = 0$

Fórmula integral de Cauchy:

Sea f analítica sobre un contorno cerrado C con la orientación positiva y en su interior. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}.\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

Esta fórmula nos dice que si una función f es analítica sobre un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces los valores de f en los puntos interiores a C quedan completamente determinados por los valores de f en C.

Cuando se escribe la fórmula integral de Cauchy de la forma, $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i.f\,(z_0)$ se puede utilizar para calcular ciertas integrales sobre contornos simples cerrados.

Ejemplo:

Sea C el circulo $|z| = 2$ con la orientación positiva. Por ser analítica la función $f(z) = z/(9 - z^2)$ dentro y sobre C, y ser el punto $z_0 = -i$ interior a C, tenemos:

$$\int_C \frac{z}{(9 - z^2).(z + i)}\,dz = \int_C \frac{\frac{z}{(9 - z^2)}}{z - (-i)}.dz = 2\pi i.\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}$$

Teorema: Si una función f es analítica en un punto, entonces sus derivadas de todos los ordenes son también funciones analíticas en ese punto y vale que:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} . \int_C \frac{f\,(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad (n = 0; 1; 2; ...)$$

Con C contorno simple cerrado y z_0 un punto fijo interior a C.

Teorema de Morera:

Si una función f es continua en un dominio D y si $\int_C f(z).dz = 0$ para todo contorno cerrado C en D, entonces f es analítica en D.

Teorema del módulo máximo:

Si f es analítica y no constante en un dominio, entonces $|f(z)|$ no alcanza un valor máximo en ese dominio. Esto es, no existe un punto z_0 en el dominio tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todos los puntos z en él.

La función Z de Riemann:

Comenzaremos nuestra exposición con una breve biografía del autor de la conjetura.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, hijo de un pastor luterano, el segundo de seis hermanos, nació en la pequeña aldea en Hanover, Alemania, el 17 de septiembre de 1826. En este año, Hanover no gozaba de una vida próspera, y las condiciones de un pastor con una mujer y seis hijos que alimentar y vestir no eran en realidad envidiables. Algunos biógrafos pretenden, quizá con justicia, que la delicada salud y las muertes prematuras de muchos de los hijos de Riemann fueron el resultado de la desnutrición de su juventud, y no debidas a las circunstancias.

La madre murió también antes de que sus hijos llegaran a la edad adulta.

Desde sus primeros años fue tímido y desconfiado, con un terrible horror ante la idea de hablar en público o de atraer la atención sobre sí mismo. En su vida posterior esta crónica timidez constituyó un serio obstáculo, ocasionándole muchos tormentos, hasta que pudo vencerla por una diligente preparación cuando tenía que hacer una presentación en público. La simpática timidez de la infancia y de la adolescencia de Riemann atraía a todo el que le conoció, y estaba en extraño contraste con la audacia de su pensamiento científico maduro.

Riemann tenía el prurito por la perfección, que más tarde habría de demorar sus publicaciones científicas.

Hacía más de lo que podía, pues el futuro matemático deseaba satisfacer los deseos de su padre y ser un gran predicador.

Le pidió a su padre el permiso para desviar sus estudios. Este consintió que Bernhard siguiera la carrera matemática, lo que produjo en el joven un sentimiento de profunda felicidad y agradecimiento.

Entonces marchó a Berlín para ser iniciado por Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein, en nuevas y vitales Matemáticas. No hay duda de que allí se originaron, al menos, los gérmenes de una de las más grandes contribuciones de Riemann a la Matemática pura. La definición de una función analítica de una variable compleja, expuesta en relación con la anticipación de Gauss al teorema fundamental de Cauchy, fue esencialmente la de Riemann. Cuando se expresa analíticamente en lugar de geométricamente, esa definición se pone a la par de las ecuaciones en derivadas parciales, que Riemann tomó como punto de partida para una teoría de funciones de una variable compleja.

Dedicó gran parte de su tiempo a la ciencia física, aparte de la Matemática por ello no emprendió su tesis doctoral hasta que tuvo 25 años.

El exceso de trabajo y la falta de comodidades provocó en Riemann un derrumbe nervioso cuando tenía 30 años, y el joven se vio forzado a trasladarse durante algunas semanas, a la región montañosa de Hartz. Al fin, en 1857, teniendo 31 años, obtuvo el cargo de profesor ayudante.

Pero entonces se produjo un verdadero desastre: su hermano murió, y desde entonces tuvo que cuidar de sus tres hermanas

A los 33 años fue nombrado el segundo sucesor de Gauss. Para aliviar sus dificultades económicas, las autoridades universitarias le permitieron residir en el Observatorio, como Gauss había hecho. Las Sociedades doctas, incluyendo la Sociedad Real de Londres y la Academia Francesa de Ciencias, le honraron nombrándole miembro, y en poco tiempo obtuvo todas las distinciones que puede recibir un hombre de ciencia.

Sus problemas materiales habían mejorado considerablemente con su nombramiento de profesor titular, y Riemann pudo casarse cuando tenía 36 años. Su mujer, Elise Koch, era amiga de sus hermanas. Un mes después de su matrimonio Riemann cayó enfermo (julio de 1862), con pleuresía. Una curación incompleta dio lugar a la tuberculosis. Amigos influyentes pidieron al gobierno que concediera a Riemann los fondos necesarios para que convaleciera en el suave clima de Italia, donde permaneció aquel invierno.

El siguiente agosto (1863) nació su hija Ida en Pisa.

Sus últimos días pasaron en una villa, en Selasca, a orillas del Lago Mayor.

Riemann murió en plena gloria de su genio maduro, el 20 de julio de 1866, teniendo 39 años.

La grandeza de Riemann como matemático reside en su poderosa capacidad de generalización y en el alcance ilimitado de los métodos y nuevos puntos de vista que descubrió tanto en la Matemática pura como en la Matemática aplicada. Los detalles jamás le importaron, y apreciaba el conjunto de un vasto problema en la forma de una unidad coherente. Hasta en las notas fragmentarias y en los proyectos incompletos, muestra la novedad, y nos permite pensar que Riemann murió mucho antes de haber realizado toda su labor.

La teoría de Riemann está basada en el teorema de Eüler de 1737 donde demuestra que la suma de los recíprocos de los números primos, es decir, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ forma una serie divergente.

La demostración surge de probar que $\sum_{p<x}\frac{1}{p} \approx \ln(\ln x) \quad (x \to \infty)$

La llamada función zeta de Riemann fue introducida por Eüler mediante la definición:
$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Se trata de una serie convergente donde s es un número complejo con parte real mayor que la unidad.

Riemann tuvo la idea de extender esta función a todo el plano complejo por medio de una extensión analítica salvo para un polo simple en s = 1.

Esta extensión la realizó por medio de una función alternativa que se comporta exactamente igual a la original en todo su dominio y la continúa analíticamente fuera de su dominio.

La función factorial:

Todos conocemos la definición de factorial para $n \in N$ como n! = n.(n-1).(n-2)....1

Eüler extendió el concepto de función factorial a (-1; +∞) como:

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-x}.x^{n}\, dx.$$

Más adelante, Gauss introduce la notación $\prod(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}.x^{s}\, dx \quad (s > -1); \prod(s) = s!$.

También puede verse que:

$\prod(s) = s.\prod(s-1)$

y que $\frac{\pi s}{\prod(s).\prod(-s)} = sen(\pi s)$ (*)

En la expresión $s! = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^s\, dt$ Riemann llamó t = nx, por lo que dt = n.dx,

entonces, ∏(s-1) =

$$\int_0^{\infty} e^{-t}.t^{s-1}dt = \int_0^{\infty} e^{-nx}(nx)^{s-1}.n.dx = n^{s-1}.n.\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1}dx = n^s.\int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1}dx$$

entonces, $\frac{\Pi(s-1)}{n^s} = \int_0^{\infty} e^{-nx}\, x^{s-1}dx$ con s>0 y n ∈ N.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(s-1)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-nx}\, x^{s-1}\right)dx$

Por un lado, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(s\text{-}1)}{n^s} = \Pi\,(s\text{-}1).\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.(1)

Por otro lado, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-nx}\, x^{s-1}\right)dx = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-nx}.x^{s-1}\right)dx = \int_0^{\infty}\left(x^{s-1}.\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\right)dx =$

$$\int_0^{\infty}\left(x^{s-1}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(e^x)^n}\right)dx$$

Aplicando lo sabido de series de potencias, donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n} = \frac{1}{r\text{-}1}$.

$$\int_0^{\infty}\left(x^{s-1}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(e^x)^n}\right)dx = \int_0^{\infty} x^{s-1}\frac{1}{e^x - 1}\,dx \quad (2)$$

de (1) y (2) $\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \Pi\,(s-1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

Luego consideró la integral sobre el contorno:

$$\int_{+\infty}^{+\infty}\frac{(-x)^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x}$$

Los límites de integración pretenden indicar el camino de integración comenzando de +∞, moviéndose hacia la izquierda por debajo del semieje positivo de las x, rodear el origen una vez en la dirección positiva y volviendo al eje positivo de las x a +∞.

La integral puede escribirse como: $\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{(e^x-1).x}\,dx + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{(e^x-1).x}\,dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1).x}\,dx$

El término del medio es $2\pi i$ veces el promedio del valor de $(-x).(e^x-1)^{-1}$ en el círculo $|x| = \delta$ (porque en este círculo $i\,d\theta = \frac{dx}{x}$).

Por lo tanto, el término del medio tiende a cero cuando $\delta \to 0$ siempre que $s > 1$ (porque $x.(e^x-1)^{-1}$ es no singular alrededor de $x = 0$)

Los otros dos términos se pueden combinar para hacer:

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to o}\left(\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{(e^x-1).x}\,dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{(e^x-1).x}\,dx\right) = (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s})\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx$$

Combinando con lo anterior, se obtiene: $\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = 2i\,\mathrm{sen}(\pi s).\Pi(s-1).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$

Finalmente, multiplicando miembro a miembro por $\frac{\Pi(-s)}{2\pi i}$ y utilizando lo predicho al hablar de la función factorial (*) $\frac{\pi s}{\Pi(s).\Pi(-s)} = sen(\pi s)$,

$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, de aquí obtenemos otra de las muchas expresiones de $\zeta(s)$ como: $\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x-1}\frac{dx}{x}$ (3)

Donde para $s > 1$, la definición coincide con $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. (4)

No obstante, la fórmula (3) para $\zeta(s)$ es válida para todo s. De hecho, la integral de (3) converge para todo s, real o complejo (pues e^x crece mucho más rápido que x^s cuando $x \to \infty$), la función definida en (3) es analítica pues su convergencia es absoluta en un dominio compacto. Esta función es analítica para todo punto salvo la posible excepción de s = 1, 2, 3..., donde $\Pi(-s)$ tiene polos. Pero para S = 2; 3; 4... la fórmula (4) no tiene polos y para s = 1, la fórmula (4) tiene un polo simple.

Por lo tanto, la función definida en (3) es una extensión analítica para todo el plano complejo salvo para un polo simple en s = 1.

Esta función es conocida como la función zeta de Riemann.

Relación entre la función zeta de Riemann y los números primos:

Tomemos la serie

$$1 + p_i^{-s} + p_i^{-2s} + p_i^{-3s} + \ldots = 1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{(p_i^s)^2} + \frac{1}{(p_i^s)^3} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_i^s)^n} =$$

(utilizando que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{r-1}$)

$$= 1+ \frac{1}{p_i^s-1} = \frac{p_i^s-1+1}{p_i^s-1} = \frac{p_i^s}{p_i^s-1} = \frac{1}{\frac{p_i^s-1}{p_i^s}} = \frac{1}{1-p_i^{-s}}$$, entonces,

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{N} (1+p_i^{-s}+p_i^{-2s}+p_i^{-3s}+\ldots) \; .$$

$$\prod_{i=1}^{N}(1+p_i^{-s}+p_i^{-2s}+p_i^{-3s}+\ldots) = \prod_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} p_i^{-ks} = \sum_{k_1=0}^{\infty} p_1^{-k_1 s} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} p_2^{-k_2 s} \cdots\cdots \sum_{k_N=0}^{\infty} p_N^{-k_N s} =$$

distribuyendo, $= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty} p_1^{-k_1 s} \cdot p_2^{-k_2 s} \ldots p_N^{-k_N s} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty} (p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots p_N^{k_N})^{-s} =$

el conjunto de enteros $\alpha_N = \{ p_1^{k_1} . p_2^{k_2} \ldots . p_N^{k_N} \}$, $0 \le k_i \; \forall i$ es el conjunto de todos los números enteros cuyos factores primos son menores o iguales que p_N. Ello implica que $j \in \alpha_N \Leftrightarrow$ todos los factores primos de j son menores que p_N.

Consideremos la siguiente expresión:

$$\left| \zeta(s) - \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} \right| = \left| \zeta(s) - 1 - n_1^{-s} - n_2^{-s} - n_3^{-s} - \ldots \right| = \left| \sum_{t=1}^{\infty} t^{-s} - 1 - n_1^{-s} - n_2^{-s} - n_3^{-s} - \ldots \right|$$

donde $n_j \in \alpha_N$

La sumatoria se realiza para todos los números naturales, en tanto que los que se restan son números enteros cuyos factores primos son menores o iguales a p_N. El resultado de esa resta será la suma de todos los números enteros cuya descomposición en factores primos conste de números cuyos factores primos sean mayores que $P = p_N$.

Definamos ese conjunto como β_N.

Luego $\left| \sum_{j \in \beta_N} j^{-s} \right| \le \sum_{j \in \beta_N} \left| j^{-s} \right| = \sum_{j \in \beta_N} j^{-R(s)} \le (P+1)^{-R(s)} + (P+2)^{-R(s)} + \ldots$

Para demostrar la igualdad anterior denotemos como δ_N al conjunto definido de la siguiente manera: $i \in \delta_N \Leftrightarrow i > P$

Demostraremos que $\beta_N \subset \delta_N$. En efecto,

$J \in \beta_N \Rightarrow j = p_1^{k_1} . p_2^{k_2} \ldots . p_N^{k_N}$, donde $pi \ge P \; \forall \; i \Rightarrow j \in \delta_N$.

Por otro lado, $\exists \; j \in \delta_N : j \notin \beta_N$. En efecto, sea $j = p^t$ tal que $p \le P$ y $t > \log_p(P)$.

Luego $p \notin \beta_N \wedge p \ge P+1 \Rightarrow p \in \delta_N$.

Por lo tanto $\left| \zeta(s) - \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} \right| \le (P+1)^{-R(s)} + (P+2)^{-R(s)} + \ldots$

Pero $\lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} (P + j)^{-R(s)} = 0$ para R(c) > 1. De donde

$$\zeta(s) = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \text{para } R(s) > 1$$

Este resultado es conocido como el producto de Eüler.

Otras equivalencias de la función zeta:

1- Expresión integral:

La función zeta puede expresarse de forma integral como sigue:

Si tenemos en cuenta que

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{t^{z+1}}\, dz = \int_n^{\infty} t^{-(z+1)}\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_n^{b} t^{-(z+1)}\, dz = \lim_{b \to \infty} - \frac{t^{-z}}{z}\Bigg|_n^b = \lim_{b \to \infty} \left(- \frac{b^{-z}}{z} + \frac{n^{-z}}{z} \right) = \frac{1}{z.n^z}$$

Se tendría que: $\dfrac{1}{n^z} = z.\displaystyle\int_n^{\infty} \frac{1}{t^{z+1}}\, dt = z.\sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{z+1}}\, dt$

Y por consiguiente:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = z.\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{z+1}}\, dt = z.\sum_{k \geq 1} \sum_{k \geq n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{z+1}}\, dt = z.\sum_{k \geq 1} k. \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{z+1}}\, dt$$

2- Usando la función gamma ($\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}.e^{-t}\, dt$) para x > 1

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} \frac{t^{x+1}}{e^x - 1}\, dt$$

3- Usando la transformada de Mellin:

$$\zeta(z) = - z. \int_0^{\infty} frac\left(\frac{1}{t}\right).t^{n-1}\, dt \quad \text{(con frac(t) = parte fraccionaria de t)}$$

4- La ecuación funcional:

$$\zeta(1-z) = \frac{2.\cos\left(\frac{\pi.z}{2}\right).\Gamma(z).\zeta(z)}{(2\pi)^{-z}}$$

5- Calculando límite:

$\lim\limits_{z \to 1} \zeta(z) = \dfrac{1}{z-1} + \gamma$, donde es la famosa constante de Euler:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \qquad (\gamma \approx \mathbf{0{,}5772156649})$$

Ceros de la función zeta de Riemann:

La hipótesis de Riemann dice que todos los ceros no triviales de la función zeta están sobre esta línea.

Otra de las equivalencias de la función zeta de Riemann es la llamada ecuación funcional, por la cual:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta\,(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta\,(1-s)$$, donde $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \geq 0$

La función zeta de Riemann tiene ceros triviales en 2; -4; -6; ...pues son los polos de $\Gamma(s/2)$. Utilizando el producto de Eüler con la ecuación funcional, se puede ver que todos los otros ceros cumplen la desigualdad $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ y son simétricos respecto de la recta donde Re(s) = ½.

En 1986, se encontraron 1.500.000.001 ceros no triviales de la función zeta, de hecho, con parte real igual a ½.

Hardí probó, en 1915, que hay un numero infinito de ceros con Re(z) = ½. Este fue el primer resultado concreto sobre la conjetura de Riemann.

En 1989, Conrey mostró que el 40% de los ceros de la función zeta están sobre la recta Re(s) = ½.

ζ (n) es conocida para n par, pero el estudio de la función para n impar es mucho más dificultosa.

En 1979 se demostró que ζ (3) es irracional aunque no se pudo demostrar lo mismo para todos los impares.

En el 2001, se demostro que existen infinitos valores de n para los cuales ζ (2n+1) es irracional y que ζ (5); ζ (7); ζ (9); ζ (11) son irracionales.

Se sabe también que:

$$\zeta\,(2n)=\frac{(-1)^{n+1}\,2^{2n-3}\,\pi^{2n}}{(2^{2n}-1)(2n-2)!}\int_0^1 E_{2(n-1)}(x)dx$$

$$\zeta\,(2n+1)=\frac{(-1)^{n}\,2^{2n-1}\,\pi^{2n+1}}{(2^{2n+1}-1)(2n)!}\int_0^1 E_{2n}(x).\tan\left(\frac{1}{2}\pi x\right)dx$$

donde $E_n(x)$ es el polinomio n-ésimo de Eüler.

El jueves 12 de septiembre de 2002, el matemático paquistaní Aslam Chaudhry presentó ante el 11º taller de Ciencias Espaciales Básicas que se desarrolló en el complejo espacial de Falda del Carmen, Provincia de Córdoba, Argentina una demostración de la conjetura de Riemann.

El encuentro fue organizado por Naciones Unidas, la Agencia Espacial Europea y la Comisión de Actividades Espaciales.

Esta presentación puede considerarse preliminar pues aún falta que un comité internacional compuesto por los más relevantes científicos del campo verifiquen que su teoría es válida.

De comprobarse que Chaudhry acertó con la resolución del gran dilema matemático, anticipó que donará su premio de un millón de dólares a alguna institución científica.